Ecole Jeunes Chercheurs Algorithmique et Calcul Formel
Montpellier, 04-08 Avril 05

Sommes harmoniques multiples

Christian Costermans, Jean-Yves Enjalbert, Hoang Ngoc Minh, Michel Petitot

Université Lille 1 &Université Lille 2

Introduction

Nombres harmoniques classiques

$$H_r(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^r} \qquad N \in \mathbb{N}, r \geq 0$$

Généralisation à des compositions $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r)$

$$H_{\mathbf{s}}(N) = \sum_{N \geq n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}}$$

<u>Problème</u> : *comportement de ces sommes pour* $N \to +\infty$ *?*

Où trouver de telles sommes?

- Analyse des arbres hyperquaternaires de dimension d [Labelle, Laforest, 95], apparition de probabilités de la forme

$$\pi_{N,k} = \frac{1}{N} \sum_{N \geq n_1 > \ldots > n_{d-1} > k} \frac{1}{i_1 \ldots i_{d-1}}$$

- Electrodynamique quantique [Blümlein, 04], les sommes harmoniques multiples interviennent sous une forme *colorée*

$$S_{a_1,\ldots,a_n}(N) = \sum_{N \geq k_1 \geq \ldots \geq k_n \geq 1} \frac{sign(a_1)^{k_1}}{k_1^{|a_1|}} \cdots \frac{sign(a_n)^{k_n}}{k_n^{|a_n|}}$$

Relation de mélange

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{s_1}} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m^{s_2}} = \sum_{N \geq n > m > 0} \frac{1}{n^{s_1} m^{s_2}} + \sum_{N \geq m > n > 0} \frac{1}{m^{s_2} n^{s_1}} + \sum_{N \geq n > 0} \frac{1}{n^{s_1+s_2}}$$

$$\Rightarrow H_{s_1}(N) H_{s_2}(N) = H_{s_1,s_2}(N) + H_{s_2,s_1}(N) + H_{s_1+s_2}(N).$$

Si on adopte le codage suivant $H_w(N) := H_{s_1,\ldots,s_r}(N)$ avec $w = y_{s_1} \ldots y_{s_r}$, on fait apparaître des relations sur les mots de la forme

$$y_{s_1} \star y_{s_2} = y_{s_1} y_{s_2} + y_{s_2} y_{s_1} + y_{s_1+s_2}.$$

COMBINATOIRE DES MOTS

Mots de Lyndon

- Soit l'alphabet $\{y_i / i \in \mathbb{N}^*\}$, le mot vide est noté ϵ.
- Y ordonné par $y_i < y_j$ si $i > j \Rightarrow$ ordre lexicographique sur Y^*
- $l \in Y^*$ mot de Lyndon $\Leftrightarrow$ l strictement plus petit que ses facteurs droits stricts.
  On note $Lyn(Y)$ l'ensemble des mots de Lyndon sur Y.
- Exemple : $w = y_1 y_4 y_2 \notin Lyn(Y)$ car $w > y_2$.
  Par contre, $u = y_4 y_2 y_1 \in Lyn(Y)$.

Produit de mélange

Outre le produit de concaténation, on définit le produit de mélange ou *stuffle* de deux mots par $\epsilon \star w = w$, pour tout $w \in Y^*$ et pour tous mots $u = y_i u'$ et $v = y_j v'$ par

$$u \star v = y_i(u' \star v) + y_j(u \star v') + y_{i+j}(u' \star v').$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} y_2 y_5 \star y_4 &= y_2(y_5 \star y_4) + y_4(y_2 y_5 \star \epsilon) + y_6(y_5 \star \epsilon) \\ &= y_2(y_5 y_4 + y_4 y_5 + y_9) + y_4 y_2 y_5 + y_6 y_5 \\ &= y_2 y_5 y_4 + y_2 y_4 y_5 + y_4 y_2 y_5 + y_2 y_9 + y_6 y_5. \end{aligned}$$

Théorème de Radford

Theorem (Radford, Hoffman, 97)

$$(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \star) \simeq (\mathbb{Q}[Lyn(Y)], \star)$$

Autrement dit, tout mot peut se décomposer *de manière unique* comme produit de mots de Lyndon.

Par exemple,

$$y_1 y_4 y_2 = y_1 \star y_4 y_2 - y_4 y_1 y_2 - y_4 y_2 y_1 - y_4 y_3 - y_5 y_2.$$

Remarque : Le procédé est <u>constructif</u>.

Algèbre des sommes harmoniques

Soit la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{H}_\mathbb{R} = (\{H_w\}_{w\in Y^*}, .)$.

Theorem (Hoffman, 97)

Pour tous mots $u, v \in Y^*$, $H_{u\star v}(N) = H_u(N)H_v(N)$.

Proposition (Hoang Ngoc Minh, 03)

$\mathcal{H}_\mathbb{R} \simeq (\mathbb{R}\langle Y\rangle), \star)$.

Corollary

$\mathcal{H}_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}[H_l, l \in Lyn(Y)]$.

Par exemple,

$$H_{1,4,2} = H_1 H_{4,2} - H_{5,2} - H_{4,1,2} - H_{4,2,1} - H_{4,3}.$$

Corollary (Petitot, 04)

Les sommes harmoniques H_w, *pour* $w \in Y^*$ *sont* $\mathbb{R}$*-linéairement indépendantes.*

DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Définition récursive de H_w

Pour $w = y_{s_1} \dots y_{s_r}$,

$$\begin{aligned}
H_w(N) &= \sum_{N \geq n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} \\
&= \sum_{n_1 = r}^{N} \frac{1}{n_1^{s_1}} \sum_{n_1 - 1 \geq n_2 > \dots > n_r > 0} \frac{1}{n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}} \\
&= \sum_{n_1 = r}^{N} \frac{1}{n_1^{s_1}} H_{w'}(n_1 - 1),
\end{aligned}$$

en posant $w = y_{s_1} w'$.

Principe de l'algorithme

- Si $w = y_r, r \geq 1$ le développement asymptotique de $H_r(N)$ est connu (Euler-Maclaurin).
- Par exemple,
$$H_2(N) = \zeta(2) - \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$$
- Si $w = y_r w'$, on utilise la définition récursive précédente sous la forme
$$H_w(N) = \zeta(w) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{s_1}} H_{w'}(n-1)$$
avec $\zeta(w) = \lim_{N\to+\infty} H_w(N)$ (Multiple Zeta Value) et on remplace $H_{w'}(n-1)$ par son D.A.

Exemple pour $w = y_4 y_2$

$$H_{4,2}(N) = \zeta(4,2) - \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{H_2(i-1)}{i^4},$$

Mais $H_2(i-1) = \zeta(2) - \frac{1}{i} - \frac{1}{2}\frac{1}{i^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{i^3}\right)$ donc

$$\begin{aligned} H_{4,2}(N) &= \zeta(4,2) - \zeta(2)\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{i^4} + \sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{i^5} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{i^6} + \sum_{i=N+1}^{\infty}\mathrm{O}\left(\frac{1}{i^7}\right) \end{aligned}$$

Exemple pour $w = y_4 y_2$ (2)

D'où, en développant les restes des séries en N

$$\begin{aligned} H_{4,2}(N) &= \zeta(4,2) - \frac{1}{3}\,\frac{\zeta(2)}{N^3} + \frac{\frac{1}{2}\,\zeta(2) + \frac{1}{4}}{N^4} \\ &- \frac{\frac{1}{3}\,\zeta(2) + \frac{2}{5}}{N^5} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^6}\right) \end{aligned}$$

Remarque : on a obtenu un D.A. à l'ordre 6 en effectuant un D.A. du numérateur à l'ordre 3.

Cas d'un mot divergent $w = y_1 y_4$

- Problème : $\zeta(1,4)$ est divergente ! En effet, $H_w(N)$ converge quand $N \to \infty$ ssi $w = y_{s_1} w'$ avec $s_1 > 1$.
- Solution: décomposition de Radford.
  En effet, puisque $y_1 y_4 = y_1 \star y_4 - y_4 y_1 - y_5$, alors
  $$\begin{aligned} H_{1,4}(N) &= H_1(N) H_4(N) - H_{4,1}(N) - H_5(N) \\ &= \frac{1}{90}\gamma\,\pi^4 - \zeta(4,1) + \frac{1}{90}\ln(N)\,\pi^4 - \zeta(5) + \frac{1}{180}\,\frac{\pi^4}{N} \\ &- \frac{1}{1080}\,\frac{\pi^4}{N^2} + \frac{1}{9}\,\frac{1}{N^3} + \frac{-1/24 + \frac{1}{10800}\,\pi^4}{N^4} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^5}\right) \end{aligned}$$
- Conclusion : nécessité de stocker une table des D.A. pour les mots de Lyndon.