Asymptotique des sommes harmoniques multiples

C. Costermans

Travail commun avec : J.Y. Enjalbert, Hoang Ngoc Minh, M. Petitot

Universités Lille 1 et Lille 2

Journées Nationales du Calcul Formel
21-25 Novembre 2005

Plan

Introduction

Structure algébrique des S.H.M.

D.A. de type récursif
- Principe
- Application

D.A. à l'aide des séries génératrices
- Polylogarithmes
- Application

Sommes harmoniques multiples (S.H.M.)

- Nombres harmoniques généralisés

$$\mathrm{H}_r(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^r} \qquad N \in \mathbb{N}, r \geq 0$$

Extension à des multi-indices $\underline{\mathbf{s}} = (s_1, \ldots, s_r)$

$$\mathrm{H}_{\underline{\mathbf{s}}}(N) = \sum_{N \geq n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}}$$

- Apparition dans l'étude de certaines probabilités (arbres hyperquaternaires [Flajolet et al., 93]), en physique quantique [Blümlein, 99], en théorie des noeuds...etc

Nos résultats

- Description de l'algèbre des Sommes Harmoniques Multiples (S.H.M), *isomorphe* à une *algèbre de mélange*.
- Algorithmes pour calculer le développement asymptotique (D.A.) de $\mathrm{H}_{\underline{\mathbf{s}}}(N)$, quand $N \to +\infty$, i.e. un polynôme $p \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que

$$\mathrm{H}_{\underline{\mathbf{s}}}(N) = p\left(\log N, \frac{1}{N}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^q}\right).$$

Codage symbolique

Nous adoptons le codage suivant :

$$\underline{\mathbf{s}} = (s_1, \ldots, s_r) \longleftrightarrow w = y_{s_1} \cdots y_{s_r} \in Y^*,$$

$$\text{where } Y = \{y_i | i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Dorénavant, nous noterons $\mathrm{H}_{\underline{\mathbf{s}}}(N) = \mathrm{H}_w(N)$ et, pour $s_1 > 1$,

$$\lim_{N \to +\infty} \mathrm{H}_{\underline{\mathbf{s}}}(N) = \zeta(\underline{\mathbf{s}}) = \zeta(w) \quad (MZV).$$

Plan

Introduction

Structure algébrique des S.H.M.

D.A. de type récursif
- Principe
- Application

D.A. à l'aide des séries génératrices
- Polylogarithmes
- Application

Produit harmonique ou "stuffle"

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{s_1}}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m^{s_2}}=\sum_{N\geq n>m>0}\frac{1}{n^{s_1}m^{s_2}}+\sum_{N\geq m>n>0}\frac{1}{m^{s_2}n^{s_1}}+\sum_{N\geq n>0}\frac{1}{n^{s_1+s_2}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{H}_{y_{s_1}}(N)\mathrm{H}_{y_{s_2}}(N)=\mathrm{H}_{y_{s_1}y_{s_2}}(N)+\mathrm{H}_{y_{s_2}y_{s_1}}(N)+\mathrm{H}_{y_{s_1+s_2}}(N)$$

Le *stuffle* de deux mots est défini par

$$\begin{aligned}\epsilon \uplus u &= u,\\ (y_i u)\uplus(y_j v) &= y_i(u\uplus v)+y_j(u\uplus v)+y_{i+j}(u\uplus v).\end{aligned}$$

Théorème (Hoffman, 97)

Pour tous $u,v\in Y^*$, $H_{u\uplus v}(N)=H_u(N)\,H_v(N)$.

Théorème de Radford

En notant $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = ($ Vect $\{H_w\}_{w \in Y^*}, .)$, nous avons en fait :

Théorème

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \simeq (\mathbb{R}\langle Y \rangle), \uplus).$$

Tout mot admet une *unique* décomposition comme produit de mots de Lyndon. Mot de Lyndon ?

Remarque : Le procédé est <u>constructif</u>.

Corollaire

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}[\mathrm{H}_l, l \in Lyn(Y)].$$

Exemple

$$\begin{aligned} y_1 y_4 y_2 &= y_1 \uplus y_4 y_2 - y_4 y_1 y_2 - y_4 y_2 y_1 - y_4 y_3 - y_5 y_2. \\ \Longleftrightarrow \quad \mathrm{H}_{1,4,2} &= \mathrm{H}_1 \mathrm{H}_{4,2} - \mathrm{H}_{4,1,2} - \mathrm{H}_{4,2,1} - \mathrm{H}_{4,3} - \mathrm{H}_{5,2}. \end{aligned}$$

Plan

Introduction

Structure algébrique des S.H.M.

D.A. de type récursif
- Principe
- Application

D.A. à l'aide des séries génératrices
- Polylogarithmes
- Application

Définition récursive de H_w

Pour $w = y_{s_1} \dots y_{s_r} = y_{s_1} w'$,

$$\mathrm{H}_w(N) = \sum_{N \geq n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} = \sum_{n=r}^{N} \frac{1}{n^{s_1}} \mathrm{H}_{w'}(n-1).$$

- Si $w = y_r, r \geq 1$ le D.A. est connu (Euler-MacLaurin). Par exemple,

$$\mathrm{H}_2(N) = \zeta(2) - \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

- Si $w = y_r w'$, on utilise la définition récursive sous la forme

$$\mathrm{H}_w(N) = \zeta(w) - \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{1}{i^{s_1}} \mathrm{H}_{w'}(i-1)$$

et on remplace $\mathrm{H}_{w'}(i-1)$ par son D.A.

Exemple pour $w = y_4 y_2$

$$\mathrm{H}_{4,2}(N) = \zeta(4,2) - \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_2(i-1)}{i^4},$$

Mais $\mathrm{H}_2(i-1) = \zeta(2) - \frac{1}{i} - \frac{1}{2}\frac{1}{i^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{i^3}\right)$ donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_{4,2}(N) &= \zeta(4,2) - \frac{1}{3}\frac{\zeta(2)}{N^3} + \frac{\frac{1}{2}\zeta(2) + \frac{1}{4}}{N^4} \\
&- \frac{\frac{1}{3}\zeta(2) + \frac{2}{5}}{N^5} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^6}\right)
\end{aligned}$$

Remarque : On obtient un D.A. à l'ordre 6 en calculant le D.A. du numérateur à l'ordre 3.

Cas d'un mot divergent $w = y_1 y_4$

- Problème : $\zeta(1,4)$ diverge ! En effet, $\mathrm{H}_w(N)$ converge quand $N \to \infty$ ssi $w = y_{s_1} w'$ avec $s_1 > 1$.
- Solution: décomposition de Radford .
  Comme $y_1 y_4 = y_1 ш y_4 - y_4 y_1 - y_5$, on a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_{1,4}(N) &= \mathrm{H}_1(N)\mathrm{H}_4(N) - \mathrm{H}_{4,1}(N) - \mathrm{H}_5(N) \\
&= \frac{\pi^4}{90}\ln(N) + \frac{\pi^4}{90}\gamma - \zeta(4,1) - \zeta(5) + \frac{\pi^4}{180}\frac{1}{N} \\
&- \frac{\pi^4}{1080}\frac{1}{N^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{N^3} + \left(\frac{\pi^4}{10800} - \frac{1}{24}\right)\frac{1}{N^4} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^5}\right)
\end{aligned}
$$

- Conclusion : nécessité de stocker une table des D.A pour les S.H.M. indexés par les mots de Lyndon.

Plan

Introduction

Structure algébrique des S.H.M.

D.A. de type récursif
- Principe
- Application

D.A. à l'aide des séries génératrices
- Polylogarithmes
- Application

Propriété fondamentale

Proposition

Soit $w = y_{s_1} \ldots y_{s_r} = y_{s_1} w'$, *alors*

$$\frac{\mathrm{Li}_w(z)}{1-z} = \sum_{n \geq 0} \mathrm{H}_w(n) z^n,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_w(z) &= \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}} \\ &= \sum_{n \geq r} \frac{\mathrm{H}_{w'}(n-1)}{n^{s_1}} z^n \end{aligned}$$

Correspondance entre z et $1-z$

Proposition

Soit $w \in Y^*$, et z???, $\mathrm{Li}_w(z)$ est égal à une combinaison algébrique de $\{\mathrm{Li}_u(1-z), u \in Y^*\}$, de $\log(1-z)$ et de polyzêta.

Exemple

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\mathrm{Li}_2(1-z) + \log(1-z)\mathrm{Li}_1(1-z) + \zeta(2)$$

Par conséquent,

$$\frac{\mathrm{Li}_w(z)}{1-z} = \sum_{j=0}^{A} a_j (1-z)^{\alpha_j} \log^{\beta_j}(1-z) + \mathrm{O}(|1-z|^A), \quad \text{quand} \quad z \to 1.$$

Détermination des coefficients de Taylor

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, on note $a_n = [z^n]f(z)$.

Proposition

$$[z^n]\frac{\log^k(1-z)}{k!(1-z)} = \mathrm{H}_{y_1^k}(n)$$

Proposition

$\mathrm{H}_{y_1^k}$ *est une combinaison algébrique de* $\{\mathrm{H}_r\}_{1\leq r\leq k}$, *qui sont algébriquement indépendants.*

Exemple

$$\mathrm{H}_{y_1^2}(N) = \frac{1}{2}[\mathrm{H}_1^2(N) - \mathrm{H}_2(N)]$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Li}_{2,1}(z)}{1-z} &= \frac{\zeta(3)}{1-z} + \log(1-z) - 1 - \frac{\log^2(1-z)}{2} \\
&+ (1-z)\left(-\frac{\log^2(1-z)}{4} + \frac{\log(1-z)}{4}\right) + \mathrm{O}(|1-z|)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\mathrm{H}_{2,1}(N) = \zeta(3) - \frac{\log(N)+1+\gamma}{N} + \frac{1}{2}\frac{\log(N)}{N^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).
$$

Merci de votre attention

Mots de Lyndon

- Y ordonné par $y_i < y_j$ si $i > j \Rightarrow$ ordre lexicographique sur Y^*
- $l \in Y^*$ mot de Lyndon $\Leftrightarrow l$ strictement inférieur à tous ses facteurs droits stricts.
  On note $Lyn(Y)$ l'ensemble des mots de Lyndon sur Y.
- Exemple : $w = y_1 y_4 y_2 \notin Lyn(Y)$ car $w > y_2$.
  Mais $u = y_4 y_2 y_1 \in Lyn(Y)$.

Back

Construction

Théorème

Any nonempty word $w \in Y^*$ may be written uniquely as a decreasing product of Lyndon words :

$$w = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \ldots l_n^{\alpha_n}, \quad l_i \in Lyn(Y), \quad l_1 > l_2 > \ldots > l_n.$$

Lemma

Let $w = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \ldots l_n^{\alpha_n} \in Y^*$. Then, putting

$$Q_w = \frac{l_1^{\text{⧢}\,\alpha_1} \text{ ⧢ } l_2^{\text{⧢}\,\alpha_2} \ldots \text{ ⧢ } l_n^{\text{⧢}\,\alpha_n}}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!},$$

we have $Q_w = w + R_w$, where R_w only contains words smaller than w. Back