Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

TD Méthodes Quantitatives n°5
Fonctions à plusieurs variables - Optimisation sous contrainte

Exercice 1 - Problème n°2, Examen Mai 2007

On cherche à optimiser la fonction f définie par $f(x,y) = xy$, $x > 0, y > 0$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$, où $g(x,y) = x^2 + 80y - 1600$.

Méthode 1 - Par substitution

1) Sous la contrainte $g(x,y) = 0$, exprimer y en fonction de x.

2) En déduire que la résolution du problème se ramène à l'étude de la fonction f_1 définie pour tout $x > 0$ par
$$f_1(x) = -\frac{x^3}{80} + 20x.$$

3) Étudier cette fonction f_1 sur $\mathbb{R}_+$.

4) En déduire la solution du problème de départ.

Méthode 2 - Calcul du Lagrangien

1) Définir le Lagrangien F associé à ce problème.

2) Calculer le Hessien ∇F.

3) On cherche un point (x_0, y_0, z_0) annulant les dérivées premières de F. Montrer que
$$z_0^2 = \frac{1}{12}.$$

4) En déduire les coordonnées (x_0, y_0) du point solution du problème initial. S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ?

Exercice 2 -

1) Chercher l'extremum de la fonction f_1 définie par $f_1(x,y) = xy - 2x$, sous la contrainte $3x + 4y = 20$. Quelle est la nature de l'extremum ?

2) Même question avec la fonction f_2 définie par $f_2(x,y) = x^2y + x^2$, sous la contrainte $2x + 3y = 15$.