Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

TD Méthodes Quantitatives n°4
Fonctions à plusieurs variables - Optimisation

Exercice 1 - Points singuliers

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le (ou les) point(s) singulier(s).

1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$,
2) $g(x,y) = xy + 12$,
3) $h(x,y) = -x^2 + 2x - y^2 + 2y + 4xy - 7$.

Exercice 2 - Fonction exponentielle

Soit la fonction g définie par
$$g(x,y) = x^2 e^{-y^2} + y^3 - 3y^2.$$
Déterminer les points singuliers de la fonction g.

Exercice 3 - Nature des points singuliers

Soit la fonction f définie par
$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy.$$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1.
2) Vérifier que les points $(0,0)$ et $(2,-2)$ sont des points singuliers pour f.
3) Calculer les dérivées d'ordre 2, en déduire la nature des deux points singuliers.

Exercice 4 - Suite de l'exercice 1

Calculer les matrices Hessiennes pour chacun des trois cas de l'exercice 1. En déduire la nature de chacun des points singuliers.

Exercice 5 - Avec 3 variables

On considère la fonction F définie par $F(x,y,z) = f(x,y) - zg(x,y)$, où $x > 0, y > 0$ et f et g sont définis par
$$\begin{cases} f(x,y) &= xy \\ g(x,y) &= x^2 + 80y - 1600 \end{cases}$$
Soit (x_0, y_0, z_0) un point singulier de F. Vérifier que $z_0^2 = \dfrac{1}{12}$ puis que $x_0 = \dfrac{40}{\sqrt{3}}$ et $y_0 = \dfrac{40}{3}$.

Calculer la matrice Hessienne de F.