Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

TD Méthodes Quantitatives n°3
Algèbre linéaire - Optimisation linéaire

Exercice 1 - Préambule

Stocker les matrices :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ a & b \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on additionner les matrices : E et Id_3 ? B et C ? B et E ? O et F ?
Effectuer les multiplications suivantes, lorsqu'elles sont possibles :

$$G.B, \quad E.G, \quad F.C, \quad C.F, \quad B.F, \quad Id_3.G, \quad G.Id_3, \quad C.O\ ?$$

Exercice 2 - Calcul matriciel - Application économique

Une usine a installé deux chaînes de production. La première chaîne produit trois produits semi-finis S_1, S_2 et S_3 à partir de quatre matières premières M_1, M_2, M_3 et M_4 alors que la seconde produit deux biens finis F_1 et F_2 à partir des trois produits semi-finis S_1, S_2 et S_3.

On consigne les quantités de matières premières entrant dans chaque unité de produit semi-fini dans une matrice A de format 3×4 et les quantités de produits semi-finis entrant dans une unité du bien fini dans une matrice B de format 2×3.

On donne $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1) Donner l'interprétation de la troisième colonne de la matrice A, de la première ligne de la matrice B.
2) Calculer la matrice $C = BA$. En déduire la quantité de la matière première M_2 entrant dans une unité du bien F_1.
3) Soit $z = \begin{pmatrix} 40 & 50 \end{pmatrix}$ la demande en biens F_1 et F_2. Déterminer les vecteurs x et y représentant respectivement les quantités des produits semi-finis et de matières premières nécessaire pour satisfaire la demande.
4) Soit $p = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ le prix des matières premières. Déterminer les vecteurs π et u représentant respectivement les prix des trois produits semi-finis et des deux biens finis.
5) En déduire la valeur V de la commande en fonction de z et u.

Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

Exercice 3 - Applications aux systèmes linéaires

On considère le système d'équations linéaires (S) suivant $\begin{cases} x+y+z=34 \\ 9x+5y+10z=303 \\ 5x+4y+2z=114 \end{cases}$

1) Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Calculer $A.X$. Traduire (S) sous forme matricielle.

2) La matrice A est-elle inversible ? En déduire la solution.

Exercice 4 - Bis

Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

2) En déduire la résolution des systèmes :

$$\begin{cases} 3x+4y+z+t=94 \\ 2x+y+2z+t=68 \\ \quad 3y+4z+2t=110 \\ 5x+y+z \quad =68 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3x+4y+z+t=62 \\ 2x+y+2z+t=45 \\ \quad 3y+4z+2t=39 \\ 5x+y+z \quad =57 \end{cases}.$$

Exercice 5 - Méthode du simplexe

Une entreprise fabrique des robes et des manteaux en utilisant deux machines A et B.

La machine A peut travailler au maximun 121h par semaine,
la machine B peut travailler au maximun 140h par semaine.

La fabrication d'une robe nécessite	1h30 d'utilisation de la machine A et
	1h30 d'utilisation de la machine B.
La fabrication d'un manteau nécessite	4h d'utilisation de la machine A et
	5h d'utilisation de la machine B.

Le profit de la vente d'une robe est de $4,20$ euros, celui d'un manteau est de $12,6$ euros (on suppose que tout les produits sont vendus).

Traduire les contraintes du problème, et trouver la production optimale par la méthode du simplexe.

Exercice 6 - Bis

L'entreprise Yabau confectionne deux boissons fruitées dont la composition et le profit (en euros par litre) est donnée par le tableau suivant :

	Orange	Fruits rouges	Ananas	Profit
Tropicalo	$0,6$	$0,2$	$0,2$	$1,5$ euro/l
Exocita	$0,3$	$0,5$	$0,2$	2 euro/l.

Cette entreprise dispose d'un stock de	$15\,000hl$ d'oranges,
	$14\,200hl$ de fruits rouges,
	$11\,400hl$ d'ananas.

Sa capacité d'embouteillage totale est de $38\,000hl$. Quel programme de fabrication donne le profit maximal ?