Licence AES, 3ème année, 2005-2006
Faculté de Droit, Université Lille 2

TD Informatique n° 4, 5 ...
Calculs matriciels

Au cours de ce TD, vous aurez besoin des fonctions suivantes : *with,matadd,matrix,multiply,evalm,det,maximize.*

Les matrices sont des objets mathématiques simples (des tableaux de nombres), mais très pratiques sur le plan des calculs. Pour illustrer cette affirmation, considérons l'exemple suivant, tiré de *Principes mathématiques pour économistes* : une entreprise produit du papier et du carton, à partir de pâte à papier , de travail et d'énergie. Supposons que pour produire les quantités x de papier et y de carton, il faille $2x+y$ unités de pâte à papier, $x+2y$ unités de travail et $2x+2y$ unités d'énergie. De manière symbolique, ces données peuvent être résumées ainsi :

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \\ 2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

en admettant la définition du produit de deux matrices. Nous verrons par la suite que cette écriture est extrêmement efficace pour la résolution de systèmes linéaires.

Exercice 1 - Prolégomènes

Stocker les matrices :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ a & b \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Peut-on additionner les matrices :

1) E et Id_3 ?
2) B et C ?
3) B et E ?
4) O et F ?

Evaluer l'addition lorsqu'elle est possible. Comparer et commenter le résultat des additions :

- $O+F$ et $F+O$?
- $E+Id_3$ et Id_3+E ?

Effectuer les multiplications suivantes, lorsqu'elles sont possibles :

$$G.B, \quad E.G, \quad F.C, \quad C.F, \quad B.F, \quad Id_3.G, \quad G.Id_3, \quad C.O\ ?$$

Licence AES, 3ème année, 2005-2006
Faculté de Droit, Université Lille 2

Exercice 2 - Passons aux choses sérieuses

On conserve les notations matricielles antérieures et on définit $Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Effectuer avec MAPLE les opérations

$$G + E, \quad F.B, \quad (G - E).B, \quad 2G, \quad F.(2E - G), \quad G^4.$$

2) Commenter le résultat des multiplications suivantes

$$Id_3.G, \quad E.Id_3, \quad Id_2.C, \quad C.Id_2,$$

ainsi que des multiplications

$$Id_3.F, \quad B.Id_3, \quad Id_3.B, \quad F.Id_3.$$

Exercice 3 - Déterminant

Donner le déterminant des matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G \quad \text{et } E = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -6 & -1 \\ 9 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 - Inversion

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse et vérifier l'égalité $A.A^{-1} = Id$.

$$C, \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 8 & -1 & -1 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad G, \quad Id_4.$$

Exercice 5 - D'application

Une entreprise artisanale fabrique trois types d'objets en bois, notés A, B et C.
Un objet de type A nécessite 9 kg de bois et de 5 h de travail,
un objet de type B nécessite 5 kg de bois et de 4 h de travail,
un objet de type C nécessite 10 kg de bois et de 2 h de travail.
Pour produire un total de 34 objets, l'entreprise a utilisé 303 kg de bois et a passé 114 heures de travail. Le but est de déterminer le nombre d'objets de chaque type qui ont été fabriqués.

1) Modéliser le problème.

2) Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Calculer $A.X$. Traduire 1) sous forme matricielle.

3) La matrice A est-elle inversible ? En déduire la solution.

Exercice 6 - Résolution de systèmes

Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse et stockez-la dans une variable IA.

2) En déduire la résolution des systèmes :

$$\begin{cases} 3x+4y+z+t=94 \\ 2x+y+2z+t=68 \\ \quad 3y+4z+2t=110 \\ 5x+y+z \qquad =68 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3x+4y+z+t=62 \\ 2x+y+2z+t=45 \\ \quad 3y+4z+2t=39 \\ 5x+y+z \qquad =57 \end{cases} .$$

Exercice 7 - Macroéconomie : système de Léontiev

On divise l'appareil économique en plusieurs secteurs industriels $S_1, \ldots, S_n$. On pose

$$\begin{aligned} X_i &= \text{production totale du secteur } S_i. \\ x_{i\,j} &= \text{valeur des biens de } S_i \text{ nécessaire pour fabriquer les biens de } S_j. \\ \overline{x}_i &= \text{production extra-sectorielle de } S_i \text{ (production superflue).} \end{aligned}$$

1) Exprimer X_i en fonction des $x_{i\,j}$ et des $\overline{x}_i$.

2) On suppose constante le rapport $a_{i\,j}$ de produits du secteur S_i consommés par le secteur S_j sur la production totale du secteur S_j.
Donner $a_{i\,j}$ en fonction de $x_{i\,j}$ et de X_j. En déduire X_i en fonction des X_j, des $a_{i\,j}$ et de $\overline{x}_i$.

3) On pose la matrice $A = \left(a_{i\,j}\right)$, les vecteurs colonnes $X = \left(X_j\right)_{1\leq j\leq n}$ et $\overline{X} = \left(\overline{x}_j\right)_{1\leq j\leq n}$.
Calculer $A.X$, puis traduire l'égalité du 2) en termes matriciels.

4) Application à un pays qui decompose son économie en trois secteurs en 2004.

– l'agriculture donne	100 à l'agriculture	400 à l'industrie	30 aux services	270 pour la consommation
– l'industrie donne	200 à l'agriculture	400 à l'industrie	250 aux services	450 pour la consommation
– les services donne	100 à l'agriculture	400 à l'industrie	30 aux services	270 pour la consommation

   a) Donner les coefficients $a_{i\,j}$, le vecteur de production totale X, puis la matrice A. Donner enfin $\overline{X}$. Entrer ces matrices sous MAPLE.
   b) Vérifier l'égaliter du 3).
   c) $Id - A$ est-elle inversible ? Exprimer X en fonction de $\overline{X}$.
   Le gouvernement établit le plan 2006 pour les consommations suivantes :

   Agriculture : 300, Industrie 520, Service 600.

   Donner la production totale des trois branches.
   d) Si au cours de l'année 2006, le gouvernement veut augmenter la production de l'industrie de 80, de combien devra-t-il augmenter la production des trois branches ?

Exercice 8 - Méthode du simplexe

Une entreprise fabrique des robes et des manteaux en utilisant deux machines nommées A et B.

La machine A peut travailler au maximun 120h par semaine,
la machine B peut travailler au maximun 140h par semaine.

La fabrication d'une robe nécessite	1h30 d'utilisation de la machine A et 1h30 d'utilisation de la machine B.
La fabrication d'un manteau nécessite	1h30 d'utilisation de la machine A et 1h30 d'utilisation de la machine B.

Le profit de la vente d'une robe est de $4,20$ euros, celui d'un manteau est de $12,6$ euros (On suppose que tout les produits sont vendus). On veut programmer la production pour obtenir un profit maximum.

1) Notons x le nombre de robes fabriquées, et y le nombre de manteaux produits. Ecrire les contraintes temporelles, puis toutes les autres contraintes.

2) Trouver la production optimun par la méthode du simplexe.

Exercice 9 - Le retour du simplexe

L'entreprise Yabau confectionne deux boissons fruitées dont la composition et le profit (en euros par litre) est donnée par le tableau suivant :

	Orange	Fruits rouges	Ananas	Profit
Tropicana	$0,6$	$0,2$	$0,2$	$1,5$ euro/l
Exocita	$0,3$	$0,5$	$0,2$	2 euro/l.

Cette entreprise dispose d'un stock de $15\,000hl$ d'oranges,
$14\,200hl$ de fruits rouges,
$11\,400hl$ d'ananas.

Sa capacité d'embouteillage totale des de $38\,000hl$. Quel programme de fabrication donne le profit maximal ?