Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

TD MÉTHODES QUANTITATIVES
CONTRÔLE N°2

Exercice 1 - Nature des points singuliers

Soit la fonction f définie par
$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy.$$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1.
2) Vérifier que les points $(0, 0)$ et $(2, -2)$ sont des points singuliers pour f.
3) Justifier que la matrice Hessienne de f s'écrit
$$Hess(f) = \begin{pmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -6y \end{pmatrix},$$
en déduire la nature des deux points singuliers.

Pour le corrigé, cf corrigé ex.3 du TD4.

Exercice 2 -

On considère la fonction f définie par
$$f(x, y) = x^2y - 2xy - 2y + 4.$$
On suppose également que les variables x et y respectent la relation $3x + 3y - 3 = 0$.

1) Exprimer y en fonction de x.
   $3x + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow 3y = -3x + 3 \Leftrightarrow y = -x + 1.$
2) En déduire que l'expression de $f(x, y)$ sous cette contrainte devient de la forme
$$h(x) = -x^3 + 3x^2 + 2.$$
   Sous cette contrainte,
$$\begin{aligned} f(x, -x+1) &= x^2(-x+1) - 2x(-x+1) - 2(-x+1) + 4 \\ &= -x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x + 2x - 2 + 4 \\ &= -x^3 + 3x^2 + 2 \\ &= h(x). \end{aligned}$$
3) Étudier la fonction h obtenue.
   $h'(x) = -3x^2 + 6x.$
   $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x(x-2) = 0$, donc h' s'annule pour $x = 0$ et $x = 2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

4) En déduire pour quelles valeurs de x et de y, la fonction f admet un (ou des) extremum sous la contrainte $3x + 3y - 3 = 0$? Justifier la nature des extrema. Que valent ces extrema?

D'après l'étude précédente, la fonction f admet un minimum local en $x = 0$ (soit donc $y = -0+1 = 1$), minimum valant 2, et un maximum local en $x = 2$ (soit donc $y = -2+1 = -1$), maximum valant 6.

5) Calculer $f(2, -1.1)$. La valeur obtenue est-elle en contradiction avec les conclusions précédentes ?

$$f(2, -1.1) = 2^2 \times (-1.1) - 2 \times 2 \times (-1.1) - 2 \times (-1.1) + 4 = 6.2,$$

donc $f(2, -1.1) > f(2, -1)$ mais ceci n'est pas contradictoire avec la réponse précédente car les valeurs $x = 2$ et $y = -1.1$ ne respectent pas la relation $y = -x + 1$.