

TD MÉTHODES QUANTITATIVES CONTRÔLE N°2

Exercice 1 - Optimisation linéaire

Une entreprise confectionne deux boissons fruitées dont la composition (en litres) et le profit (en euros par litre) sont donnés par le tableau suivant :

	Fruits			
	Orange	rouges	Ananas	Profit
Tropicalo	0,6	0,2	0,2	1,5 euro/L
Exocita	0,3	0,5	0,2	2 euro/L.
Cette entreprise dispose d'un stock de	15 000L d'oranges, 14 200L de fruits rouges, 11 400L d'ananas.			

Sa capacité d'embouteillage totale est de 38 000L

- 1) En notant x le nombre de litres de Tropicalo et y le nombre de litres d'Exocita fabriquées, exprimer les 3 contraintes liées aux problèmes de stock et la 4e contrainte portant sur l'embouteillage total.

Les 4 contraintes s'écrivent

$$\begin{cases} 0.6x + 0.3y \leq 15000 \\ 0.2x + 0.5y \leq 14200 \\ 0.2x + 0.2y \leq 11400 \\ x + y \leq 38000. \end{cases}$$

- 2) Exprimer le profit réalisé en fonction de x et y .

Le profit réalisé vaut $P = 1.5x + 2y$.

- 3) On examine 2 cas extrêmes : celui où l'entreprise ne produit que du Tropicalo et celui où l'entreprise ne produit que de l'Exocita.

Pour chacun de ces deux cas, trouver la production maximale à partir des 4 contraintes, ainsi que le profit correspondant.

Le 1er cas correspond à $y = 0$, les contraintes s'écrivent donc

$$\begin{cases} 0.6x \leq 15000 \\ 0.2x \leq 14200 \\ 0.2x \leq 11400 \\ x \leq 38000. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 25000 \\ x \leq 71000 \\ x \leq 57000 \\ x \leq 38000, \end{cases}$$

La production maximale est donc de $x = 25000$ L pour un profit de $25000 \times 1.5 = 37500$.

Le 2nd cas correspond à $x = 0$, les contraintes s'écrivent donc

$$\begin{cases} 0.3y \leq 15000 \\ 0.5y \leq 14200 \\ 0.2y \leq 11400 \\ y \leq 38000. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 50000 \\ y \leq 28400 \\ y \leq 57000 \\ y \leq 38000, \end{cases}$$

La production maximale est donc de $y = 28400$ L pour un profit de $28400 \times 2 = 56800$.

Exercice 2 -

Une entreprise internationale vend un même produit aux États-Unis à un prix x (en dollars) et en Europe à un prix y (en euros). On suppose que le profit dégagé par cette entreprise (en euros) est donné par

$$f(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}y^3 + 32.$$

On suppose de plus qu'en raison du cours du dollar, les prix x et y respectent la relation $-x + y = 0$.

- 1) Sous cette contrainte, exprimer y en fonction de x .

Si $-x + y = 0$ alors $y = x$.

- 2) Justifier que l'expression de $f(x, y)$ se résume alors à une certaine fonction

$$h(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 32.$$

Sous cette contrainte,

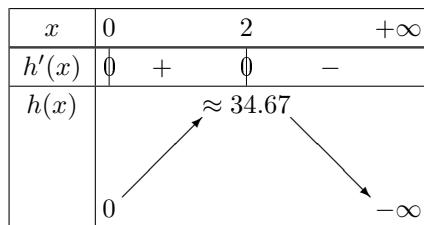
$$f(x, x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 32 = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 32 = h(x).$$

- 3) Étudier cette fonction h .

h est dérivable sur \mathbb{R} avec pour dérivée $h'(x) = -\frac{2}{3}3x^2 + 4x = -2x^2 + 4x$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow -2x(x - 2) = 0.$$

Donc h' s'annule en $x = 0$ et $x = 2$.



- 4) Pour quelle valeur de x et de y , le profit est-il optimal? Que vaut alors ce profit? S'agit-il d'un profit maximal ou minimal?

D'après la question précédente, le profit est maximal pour $x = 2$, ce qui correspond à $y = 2$ (car $x = y$). Ce profit vaut alors environ 34.67.

- 5) Calculer la valeur $f(2.1, 2)$. Ce résultat est-il contradictoire avec les réponses précédentes ?

$$f(2.1, 2) = -\frac{1}{3} \times (2.1)^3 + 2 \times (2.1)^2 - \frac{1}{3} \times 2^3 + 32 \approx 35.06.$$

Donc $f(2.1, 2) > f(2, 2)$ mais ceci n'est pas contradictoire avec la réponse précédente car les valeurs $x = 2.1$ et $y = 2$ ne respectent pas la contrainte $y = x$.