Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

TD Méthodes Quantitatives
Contrôle n°2

Exercice 1 - Optimisation linéaire

Une entreprise confectionne deux boissons fruitées dont la composition (en litres) et le profit (en euros par litre) sont donnés par le tableau suivant :

	Orange	Fruits rouges	Ananas	Profit
Tropicalo	$0,6$	$0,2$	$0,2$	$1,5$ euro/L
Exocita	$0,3$	$0,5$	$0,2$	2 euro/L.

Cette entreprise dispose d'un stock de $15\,000L$ d'oranges,
$14\,200L$ de fruits rouges,
$11\,400L$ d'ananas.

Sa capacité d'embouteillage totale est de $38\,000L$

1) En notant x le nombre de litres de Tropicalo et y le nombre de litres d'Exocita fabriquées, exprimer les 3 contraintes liées aux problèmes de stock et la 4e contrainte portant sur l'embouteillage total.

   Les 4 contraintes s'écrivent
$$\begin{cases} 0.6x+0.3y & \leq 15000 \\ 0.2x+0.5y & \leq 14200 \\ 0.2x+0.2y & \leq 11400 \\ x+y & \leq 38000. \end{cases}$$

2) Exprimer le profit réalisé en fonction de x et y.

   Le profit réalisé vaut $P = 1.5x + 2y$.

3) On examine 2 cas extrêmes : celui où l'entreprise ne produit que du Tropicalo et celui où l'entreprise ne produit que de l'Exocita.

   Pour chacun de ces deux cas, trouver la production maximale à partir des 4 contraintes, ainsi que le profit correspondant.

   Le 1er cas correspond à $y = 0$, les contraintes s'écrivent donc
$$\begin{cases} 0.6x & \leq 15000 \\ 0.2x & \leq 14200 \\ 0.2x & \leq 11400 \\ x & \leq 38000. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & \leq 25000 \\ x & \leq 71000 \\ x & \leq 57000 \\ x & \leq 38000, \end{cases}$$

   La production maximale est donc de $x = 25000$ L pour un profit de $25000 \times 1.5 = 37500$.

   Le 2nd cas correspond à $x = 0$, les contraintes s'écrivent donc
$$\begin{cases} 0.3y & \leq 15000 \\ 0.5y & \leq 14200 \\ 0.2y & \leq 11400 \\ y & \leq 38000. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & \leq 50000 \\ y & \leq 28400 \\ y & \leq 57000 \\ y & \leq 38000, \end{cases}$$

La production maximale est donc de $y = 28400$ L pour un profit de $28400 \times 2 = 56800$.

Exercice 2 -

Une entreprise internationale vend un même produit aux États-Unis à un prix x (en dollars) et en Europe à un prix y (en euros). On suppose que le profit dégagé par cette entreprise (en euros) est donné par

$$f(x,y) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}y^3 + 32.$$

On suppose de plus qu'en raison du cours du dollar, les prix x et y respectent la relation $-x+y=0$.

1) Sous cette contrainte, exprimer y en fonction de x.

   Si $-x+y=0$ alors $y=x$.

2) Justifier que l'expression de $f(x,y)$ se résume alors à une certaine fonction

$$h(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 32.$$

   Sous cette contrainte,

$$f(x,x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 32 = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 32 = h(x).$$

3) Étudier cette fonction h.

   h est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour dérivée $h'(x) = -\frac{2}{3}3x^2 + 4x = -2x^2 + 4x$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow -2x(x-2) = 0.$$

   Donc h' s'annule en $x=0$ et $x=2$.

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	≈ 34.67	$\searrow$	$-\infty$

4) Pour quelle valeur de x et de y, le profit est-il optimal? Que vaut alors ce profit? S'agit-il d'un profit maximal ou minimal?

   D'après la question précédente, le profit est maximal pour $x=2$, ce qui correspond à $y=2$ (car $x=y$). Ce profit vaut alors environ 34.67.

5) Calculer la valeur $f(2.1, 2)$. Ce résultat est-il contradictoire avec les réponses précédentes ?

$$f(2.1,2) = -\frac{1}{3} \times (2.1)^3 + 2 \times (2.1)^2 - \frac{1}{3} \times 2^3 + 32 \approx 35.06.$$

   Donc $f(2.1,2) > f(2,2)$ mais ceci n'est pas contradictoire avec la réponse précédente car les valeurs $x=2.1$ et $y=2$ ne respectent pas la contrainte $y=x$.