Université Lille 2 – Droit et Santé
Faculté des Sciences Juridiques, Politiques et Sociales
Licence AES - Remédiation

Epreuve de Méthodes quantitatives en économie.

Vendredi 06 juin 2008, de 09h00 à 12h00
(calculatrice autorisée, documents non autorisés)

Exercice 1 -

On considère la fonction de demande suivante

$$Q(p) = \frac{ap+b}{p+c},$$

où p désigne le prix de vente unitaire.

1) On précise que la demande vaut 25 (respectivement 14 et 3) pour un prix unitaire de 1 (respectivement de 2 et de 5). En déduire un système de trois équations vérifiées par les constantes a, b et c.

2) Préciser les étapes intermédiaires prouvant que ce système est équivalent au système (S)

$$\begin{cases} a+b & -25c = 25 \\ \quad -b & +36c = -22 \\ \quad -4b & +122c = -110. \end{cases}$$

3) Que vaut le déterminant de ce système (S)? Quel est alors le nombre de solutions du système ?

4) Résoudre le système (S) par la méthode de votre choix.

5) Quelle est la demande pour un prix de 7 ?

Exercice 2 - Optimisation linéaire

Une entreprise confectionne deux boissons fruitées dont la composition (en litres) et le profit (en euros par litre) sont donnés par le tableau suivant :

	Orange	Fruits rouges	Ananas	Profit
Tropicalo	$0,6$	$0,2$	$0,2$	$1,5$ euro/L
Exocita	$0,3$	$0,5$	$0,2$	2 euro/L.

Cette entreprise dispose d'un stock de $15\,000L$ d'oranges,
$14\,200L$ de fruits rouges,
$11\,400L$ d'ananas.

Sa capacité d'embouteillage totale est de $38\,000L$.

1) En notant x le nombre de litres de Tropicalo et y le nombre de litres d'Exocita fabriquées, exprimer les 3 contraintes liées aux problèmes de stock et la 4e contrainte portant sur l'embouteillage total.

2) Exprimer le profit réalisé en fonction de x et y.

3) On examine deux cas extrêmes : celui où l'entreprise ne produit que du Tropicalo et celui où l'entreprise ne produit que de l'Exocita.

   Pour chacun de ces deux cas, trouver la production maximale à partir des 4 contraintes, ainsi que le profit correspondant.

Exercice 3 -

Partie 1

On cherche à optimiser la fonction f définie par $f(x,y) = xy - 2x$, pour $x \geq 0, y \geq 0$

1) Déterminer l'unique point singulier pour f.
2) Calculer le Hessien de $f, \nabla f$.
3) En déduire la nature du point considéré.

Partie 2

On cherche maintenant à optimiser cette fonction f, mais sous la contrainte $g(x,y) = 0$, où $g(x,y) = 3x + 4y - 20$.

1) Définir le Lagrangien $F(x,y,z)$ associé à ce problème.
2) Calculer le Hessien ∇F.
3) On cherche un point (x_0, y_0, z_0) annulant les dérivées premières de F. Montrer que

$$x = 2, y = \frac{7}{2}, z = \frac{1}{2}.$$

4) Quelle est alors la solution du problème initial? S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum?
5) Que vaut la fonction f en ce point?