Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

Corrigé des séances de TD 7 à 9

Feuille de TD n°4

Exercices 1 et 4

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ donc le seul point critique (point dont les coordonnées annulent les *deux* dérivées d'ordre 1) est le point $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Le déterminant formé par les dérivées partielles d'ordre 2 (déterminant appelé *Hessien*) vaut donc

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 0 \times 0 = 4 > 0,$$

par conséquent f admet soit un maximum soit un minimum en $(0,0)$. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, il s'agit en fait d'un minimum.

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ donc le seul point critique est le point $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Le Hessien en $(0,0)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 < 0,$$

par conséquent f n'admet ni maximum ni minimum en $(0,0)$.

3) $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2 + 4y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 2 + 4x$. La recherche d'un point critique amène donc à résoudre le système d'équations : $\begin{cases} -2x + 4y & = -2 \\ 4x - 2y & = -2, \end{cases}$ système dont on vérifie qu'il admet une unique solution $(-1,-1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$$

Le Hessien en $(-1,-1)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \times -2 - 4 \times 4 = -12 < 0,$$

par conséquent f n'admet ni maximum ni minimum en $(-1,-1)$.

Exercice 2

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xe^{-y^2}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 \times -2ye^{-y^2} + 3y^2 - 6y$.

Pour chercher le (ou les) point(s) critique(s), il faut d'abord résoudre l'équation $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$. Or, comme $e^{-y^2} \neq 0$, la seule solution est $x = 0$.

L'équation $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ se résume alors à $3y^2 - 6y = 0$ qui a pour solutions $y = 0$ et $y = 2$.

Il y a donc deux points critiques pour g qui sont $(0,0)$ et $(0,2)$.

Exercice 3

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 6x$.

2) Vérifions que $(0,0)$ est un point critique pour f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3 \times 0^2 + 6 \times 0 & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -3 \times 0^2 + 6 \times 0 & = 0. \end{cases}$$

Vérifions que $(2,-2)$ est un point critique pour f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(2,-2) = 3 \times 2^2 + 6 \times -2 & = 12 - 12 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,-2) = -3 \times (-2)^2 + 6 \times 2 & = -12 + 12 = 0. \end{cases}$$

3)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y.$$

Le Hessien en $(0,0)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} 6 \times 0 & 6 \\ 6 & -6 \times 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 - 6 \times 6 = -36 < 0,$$

par conséquent f n'admet ni maximum ni minimum en $(0,0)$.

Et le Hessien en $(2,-2)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} 6 \times 2 & 6 \\ 6 & -6 \times -2 \end{vmatrix} = 12 \times 12 - 6 \times 6 = 108 > 0,$$

par conséquent f admet un maximum ou un minimum en $(2,-2)$. Comme de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-2) = 12 > 0$, il s'agit d'un minimum.

Exercice 5

$$F(x,y,z) = xy - z(x^2 + 80y - 1600).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & = y - 2zx \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & = x - 80z \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) & = -(x^2 + 80y - 1600). \end{cases}$$

Soit (x_0, y_0, z_0) un point singulier pour F, alors

$$\begin{cases} y_0 - 2z_0x_0 = 0 \\ x_0 - 80z_0 = 0 \\ -(x_0^2 + 80y_0 - 1600) = 0. \end{cases}$$

De la deuxième équation, on trouve que

$$x_0 = 80z_0$$

et de la première on trouve que

$$y_0 = 2z_0x_0 = 2z_0(80z_0) = 160z_0^2.$$

En réinjectant cela dans la troisième équation, il vient

$$\begin{aligned} (80z_0)^2 + 80 \times 160z_0^2 - 1600 &= 0 \\ 6400z_0^2 + 12800z_0^2 &= 1600 \\ 19200z_0^2 &= 1600 \\ z_0^2 &= \frac{1600}{19200} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Comme $z_0 > 0$ [1] , on en déduit que $z_0 = \frac{1}{\sqrt{12}}$, d'où

$$\begin{aligned} x_0 &= 80z_0 = \frac{80}{\sqrt{12}} = \frac{80}{\sqrt{3}} \\ y_0 &= 160z_0^2 = \frac{160}{12} = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Feuille de TD n°5

Exercice 1

Méthode 1

1)

$$x^2 + 80y - 1600 = 0 \Leftrightarrow 80y = -x^2 + 1600 \Leftrightarrow y = -\frac{x^2}{80} + 20.$$

2) On cherche donc à optimiser la fonction

$$f_1(x) = f(x, -\frac{x^2}{80} + 20) = x \cdot \left(-\frac{x^2}{80} + 20\right) = -\frac{x^3}{80} + 20x.$$

3)

$$f_1'(x) = -\frac{3x^2}{80} + 20.$$

[1] Ce point était précisé dans l'énoncé de l'examen de Mai 2007, et justifié par le fait que $x_0 = 80z_0$, donc x_0 et z_0 sont de même signe, et on avait précisé en énoncé que F était définie uniquement pour $x > 0, y > 0$.

$$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow = -\frac{3x^2}{80} + 20 = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{80} = 20 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1600}{3}.$$

Comme on ne considère la fonction f_1 que sur l'ensemble des $x > 0$, la fonction f_1' ne s'annule que pour $x = \frac{40}{\sqrt{3}}$.

x	0	$\frac{40}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$
$f_1(x)$	0 $\nearrow$	$-\frac{800}{9}\sqrt{3}+20$	$\searrow$ $-\infty$

4) La fonction f de départ admet donc, sous la contrainte $g(x,y) = 0$ un maximum au point (x_0, y_0) avec $x_0 = \frac{40}{\sqrt{3}}$ et $y_0 = -\frac{x_0^2}{80} + 20 = \frac{40}{3}$.

Méthode 2

1) On définit $F(x,y,z) = f(x,y) - zg(x,y)$.
2) La matrice Hessienne de F est donnée par

$$\begin{pmatrix} -2z & 1 & -2x \\ 1 & 0 & -80 \\ -2x & -80 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice (le Hessien) est alors obtenu par développement suivant la 2e colonne (un autre choix est possible)

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y,z) &= \begin{vmatrix} -2z & 1 & -2x \\ 1 & 0 & -80 \\ -2x & -80 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -1 \begin{vmatrix} 1 & -80 \\ -2x & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2z & -2x \\ -2x & 0 \end{vmatrix} + 80 \begin{vmatrix} -2z & -2x \\ 1 & -80. \end{vmatrix} \\ &= 160x + 0 + 80(160z + 2x) \\ &= 320x + 12800z. \end{aligned}$$

3) et 4) cf Exercice 5, TD 4.

Comme

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 320 \times \frac{40}{\sqrt{3}} + 12800 \times \frac{1}{\sqrt{12}} > 0,$$

on peut affirmer que le point trouvé correspond à un maximum pour f.

Exercice 2

Méthode 1

1) Sous la contrainte proposée, on exprime y en fonction de x : $y = -\dfrac{3}{4}x + 5$.

Soit $g_1(x) = f_1(x, -\frac{3}{4}x + 5) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$.

$g_1'(x) = -\dfrac{3}{2}x + 3$ donc g_1' s'annule en $x = 2$. Pour constater qu'il s'agit d'un maximum, on peut, par exemple, calculer $g_1''(x) = -\frac{3}{2}$. En particulier $g_1''(2) = -\frac{3}{2} < 0$, ce qui prouve qu'il s'agit d'un maximum.

2) Sous la contrainte $2x + 3y = 15$, on peut exprimer y en fonction de x : $y = -\dfrac{2}{3}x + 5$.

On est donc ramené à l'étude d'une fonction à une seule variable :

$$g_2(x) = f_2(x, -\frac{2}{3}x + 5) = x^2\left(-\frac{2}{3}x + 5\right) + x^2 = -\frac{2}{3}x^3 + 6x^2.$$

$g_2'(x) = -2x^2 + 12x = 2x(-x + 6)$ donc g_2' s'annule en $x = 0$ et $x = 6$. Pour déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, on peut procéder à l'étude du signe de g_2' via un tableau de signes. On peut aussi regarder la dérivée seconde $g_2''(x) = -4x + 12$.

Plus précisément, $g_2''(0) = 12 > 0$ donc g_2 admet un minimum en $x = 0$ et $g_2''(6) = -4 \times 6 + 12 = -12 < 0$ donc g_2 admet un maximum en $x = 6$.

Méthode 2

```
> F:=(x,y,z)->x*y-2*x-z*(3*x+4*y-20);
```

$$F := (x, y, z) \mapsto xy - 2\,x - z\,(3\,x + 4\,y - 20)$$

```
> A:=diff(F(x,y,z),x);B:=diff(F(x,y,z),y);C:=diff(F(x,y,z),z);
```

$$A := y - 2 - 3\,z$$
$$B := x - 4\,z$$
$$C := -3\,x - 4\,y + 20$$

```
> solve(A=0,B=0,C=0); #A la main, il s'agit de résoudre un système
linéaire #
```

$$\{z = 1/2, y = 7/2, x = 2\}$$

```
> with(VectorCalculus);H:=Hessian(F(x,y,z),[x,y,z]);
```

$$H := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg);Hessien:=det(H);
```

$$Hessien := 24$$

Comme le Hessien est positif, le point $\left(2, \dfrac{7}{2}\right)$ correspond à un maximum.

```
> F:=(x,y,z)->x^2*y+x^2-z*(2*x+3*y-15);
```

$$F := (x, y, z) \mapsto x^2y + x^2 - z\,(2\,x + 3\,y - 15)$$

```
> A:=diff(F(x,y,z),x);B:=diff(F(x,y,z),y);C:=diff(F(x,y,z),z);
```

$$A := 2\,xy + 2\,x - 2\,z$$
$$B := x^2 - 3\,z$$
$$C := -2\,x - 3\,y + 15$$

```
> solve(A=0,B=0,C=0);
```

$$\{x = 0, z = 0, y = 5\}, \{y = 1, x = 6, z = 12\}$$

```
> # Il y a donc deux points à étudier #
> H:=Hessian(F(x,y,z),[x,y,z]);
```

$$H := \begin{bmatrix} 2\,y+2 & 2\,x & -2 \\ 2\,x & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Hessien:=det(H);
```

$$\mathit{Hessien} := -18\,y - 18 + 24\,x$$

```
> #On remplace alors par les valeurs qui annulent les dérivées
d'ordre 1#
> x:=0:y:=5:Hessien;
```

$$-108$$

Au point $(0, 5)$ le Hessien est négatif, ce point correspond donc à un minimum.

```
> x:=6:y:=1:Hessien;
```

$$108$$

Au point $(6, 1)$ le Hessien est positif, ce point correspond donc à un maximum.