Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

Corrigé des séances de TD 4 à 6

Feuille de TD n°2

Exercice 3

```
> -3*(-4/5)-3.2*3/4;
```

$$0$$

Pour (S1) le déterminant est nul. On vérifie alors que les deux équations sont incompatibles (multiplier l'équation (1) par -1/4) donc il n'y a aucune solution.

```
> 2*4-3*6;
```

$$-10$$

```
> solve(2*x+3*y=5,4*y+6*x=3,x,y);
```

$$\left\{y = \tfrac{12}{5}, x = -\tfrac{11}{10}\right\}$$

```
> 2*6-3*4;
```

$$0$$

Le déterminant du système (S3) est nul. De plus, on vérifie (multiplier l'équation (1) par 2) que les équations (1) et (2) sont équivalentes, il y a donc une infinité de solutions : l'ensemble des couples (x,y) tels que 2x+3y=2.4.

Exercice 4

```
> C:=Q->a*Q^3+b*Q+c;
```

$$C := Q \mapsto aQ^3 + bQ + c$$

```
> solve({C(0)=3,C(3)=42,C(6)=27});
```

$\{a = -1/3, b = 16, c = 3\}$

Résolution à la main

De $C(0) = 3$, on déduit que $c = 3$. Il reste donc à résoudre

$$\begin{cases} C(3) = 27a + 3b + 3 & = 42 \\ C(6) = 216a + 6b + 3 & = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27a + 3b & = 39\,(L_1) \\ 216a + 6b & = 24\,(L_2) \end{cases}$$

On résout alors le système par combinaison (on pourrait tout aussi bien résoudre par substitution).

$$\begin{cases} 27a + 3b & = 39\,(L_1) \\ 162a & = -54\,(L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \end{cases}$$

ce qui permet de retrouver les réponses de Maple : $a = -\dfrac{54}{162} = -\dfrac{1}{3}$, puis $b = 16$.

Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

Exercice 4

Soit x (respectivement y et z) le nombre d'objets en pin (respectivement en chêne et en hêtre) produits.

L'interprétation des données de l'énoncé concernant le nombre total d'objets, les contraintes sur l'utilisation du bois et sur le temps de travail nous conduit au système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z & = 34\,(L_1) \\ 9x+5y+10z & = 303\,(L_2) \\ 5x+4y+2z & = 114\,(L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z & = 34\,(L_1) \\ -4y+z & = -3\,(L_2) \leftarrow (L_2)-9(L_1) \\ -y-3z & = -56\,(L_3) \leftarrow (L_3)-5(L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z & = 34\,(L_1) \\ -4y+z & = -3\,(L_2) \\ -13z & = -221\,(L_3) \leftarrow 4(L_3)-(L_2). \end{cases}$$

D'où, en résolvant (L_3), puis (L_2) et enfin (L_1), on trouve successivement

$$z = 17, y = 5 \text{ et } x = 12.$$

Feuille de TD n°3

Exercice 2

```
> with(linalg);
> A:=matrix(3,4,[4,1,2,0,3,0,1,4,0,6,5,1]);B:=matrix(2,3,[6,0,4,5,3,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> C:=multiply(B,A);
```

$$C := \begin{bmatrix} 24 & 30 & 32 & 4 \\ 29 & 5 & 13 & 12 \end{bmatrix}$$

Une unité de F1 nécessite donc 30 unités de M2.

```
> z:=matrix(1,2,[40,50]);
```

$$z := \begin{bmatrix} 40 & 50 \end{bmatrix}$$

```
> x:=multiply(z,B);#On calcule la demande en produits semi-finis#
```

$$x := \begin{bmatrix} 490 & 150 & 160 \end{bmatrix}$$

```
> y:=multiply(x,A);#Puis la demande en matières premières#
```

$$y := \begin{bmatrix} 2410 & 1450 & 1930 & 760 \end{bmatrix}$$

```
> #Ou bien directement#
> y:=multiply(z,C);
```

$$y := \begin{bmatrix} 2410 & 1450 & 1930 & 760 \end{bmatrix}$$

```
> p:=matrix(4,1,[5,3,1,2]);
```

$$p := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> pi:=multiply(A,p);#On calcule le prix des semi-finis#
```

$$\pi := \begin{bmatrix} 25 \\ 24 \\ 25 \end{bmatrix}$$

```
> u:=multiply(B,pi);#Puis le prix de F1 et F2#
```

$$u := \begin{bmatrix} 250 \\ 197 \end{bmatrix}$$

```
> #Ou bien directement#
> u:=multiply(C,p);
```

$$u := \begin{bmatrix} 250 \\ 197 \end{bmatrix}$$

```
> #Valeur de la commande#
> V:=multiply(z,u);
```

$$V := \begin{bmatrix} 19850 \end{bmatrix}$$

Exercice 3

```
> with(linalg):A:=matrix(3,3,[1,1,1,9,5,10,5,4,2]):X:=matrix(3,1,[x,y,z]):
> multiply(A,X);
```

$$\begin{bmatrix} x + y + z \\ 9\,x + 5\,y + 10\,z \\ 5\,x + 4\,y + 2\,z \end{bmatrix}$$

Le système d'equations de la question 1) se traduit alors sous la forme matricielle AX=B, où B est la matrice

```
> B:=matrix(3,1,[34,303,114]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 34 \\ 303 \\ 114 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

Comme son déterminant est non nul, A est inversible, et son inverse est donnée par :

```
> inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{30}{13} & \frac{2}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{32}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{11}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{4}{13} \end{bmatrix}$$

On en déduit alors la solution du système AX=B sous la forme :

```
> multiply(inverse(A),B);
```

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 17 \end{bmatrix}$$

La solution est donc le triplet x=12, y=5, z=17.

Exercice 4

```
> A:=matrix(4,4,[3,4,1,1,2,1,2,1,0,3,4,2,5,1,1,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$22$$

On en déduit que A est inversible, car de déterminant non nul.

```
> invA:=inverse(A);
```

$$invA := \begin{bmatrix} \frac{1}{22} & \frac{7}{22} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{22} \\ \frac{2}{11} & -\frac{8}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{9}{22} & -\frac{19}{22} & \frac{7}{11} & \frac{13}{22} \\ \frac{6}{11} & \frac{31}{11} & -\frac{13}{11} & -\frac{16}{11} \end{bmatrix}$$

Les deux systèmes s'écrivent alors respectivement AX=B1 et AX=B2, avec

```
> B1:=matrix(4,1,[94,68,110,68]); B2:=matrix(4,1,[62,45,39,57]);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} 94 \\ 68 \\ 110 \\ 68 \end{bmatrix}$$

$$B2 := \begin{bmatrix} 62 \\ 45 \\ 39 \\ 57 \end{bmatrix}$$

Les solutions sont alors données par $X=A^{-1}B1$ (respectivement $X=A^{-1}B2$.)

```
> multiply(invA,B1);
```

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

```
> multiply(invA,B2);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{139}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ -\frac{63}{11} \\ \frac{348}{11} \end{bmatrix}$$

Exercice 5

```
> with(simplex):
> contraintes:={1.5*x+4*y<=121,1.5*x+5*y<=140,x>=0,y>=0}:
> profit:=4.2*x+12.6*y;
```

$$profit := 4.2\,x + 12.6\,y$$

```
> maximize(profit,contraintes);
```

$$\{x = 30.0, y = 19.0\}$$

Le profit est donc optimal pour une production de 30 manteaux et 19 robes.

Exercice 6

Soit x le nombre de litres de Tropicalo fabriqués et y celui d'Exocita.

```
> contraintes:={0.6*x+0.3*y<=1500000,0.2*x+0.5*y<=1420000,0.2*x+0.2*y<=1140000,
> x+y<=3800000,x>=0,y>=0}:
> profit:=1.5*x+2*y;
```

$$profit := 1.5\,x + 2\,y$$

```
> maximize(profit,contraintes);
```

$$\{x = 1350000.0, y = 2300000.0\}$$

Le profit est donc optimal pour 13500 hL de Tropicalo et 23000 hL d'Exocita.

Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

Corrigé du contrôle n°1

Exercice 1 - Loi de Pareto

Le nombre d'individus d'une population ayant un revenu au moins égal à x est donné par la loi de Pareto

$$N(x) = \frac{10^7}{x^2}$$

Déterminer les quantités suivantes :
1) le nombre de personnes ayant un revenu compris entre 50 et 200

$$N(50) - N(200) = \frac{10^7}{50^2} - \frac{10^7}{200^2} = 4000 - 250 = 3750.$$

2) le millième plus haut revenu.

On résout l'équation $N(x) = 1000$ soit $\frac{10^7}{x^2} = 1000 \Leftrightarrow x^2 = 10000$ $\Leftrightarrow x = 100 \quad \text{ou} \quad x = -100$. Comme $x > 0$, le revenu gagné par exactement 1000 personnes (le millième plus haut revenu) est de 100.

Exercice 2 - Fonctions de coût

On considère la fonction de coût moyen définie par

$$CMo(Q) = Q^2 - 12Q + 60.$$

1) Déterminer les fonctions de coût total C et de coût marginal CMa.

   $C(Q) = QCMo(Q) = Q^3 - 12Q^2 + 60Q$, et $CMa(Q) = C'(Q) = 3Q^2 - 12 \cdot 2Q + 60 = 3Q^2 - 24Q + 60$.

2) *L'élasticité* d'une fonction f par rapport à une variable x est définie par $\epsilon_{f/x} = \dfrac{x}{f(x)} f'(x)$. Montrer que l'élasticité de C par rapport à la production Q est donnée par

$$\epsilon_{C/Q} = \frac{CMa(Q)}{CMo(Q)}.$$

   Reprendre la définition de l'énoncé en remplaçant f par C et x par Q : $f'(x)$ est exactement $CMa(Q)$ et $\dfrac{x}{f(x)} = \dfrac{Q}{C(Q)} = \dfrac{1}{CMo(Q)}$.

3) Étudier les variations de CMo, en déduire la production pour laquelle ce coût moyen est minimal.

   $CMo'(Q) = 2Q - 12$ et $2Q - 12 > 0 \Leftrightarrow 2Q > 12 \Leftrightarrow Q > 6$. Donc la fonction CMo est décroissante sur $[0, 6]$ et croissante sur $[6, +\infty[$, le coût moyen est donc minimal en $Q = 6$.

4) Trouver la valeur Q pour laquelle le coût moyen est égal au coût marginal. Que constatez-vous?

$$\begin{array}{rcl} CMa(Q) & = & CMo(Q) \\ \Leftrightarrow 3Q^2 - 24Q + 60 & = & Q^2 - 12Q + 60 \\ \Leftrightarrow 2Q^2 - 12Q & = & 0 \\ \Leftrightarrow Q(2Q - 12) & = & 0 \\ \Leftrightarrow Q = 0 & \text{ou} & 2Q - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow Q = 0 & \text{ou} & Q = 6. \end{array}$$

Comme $Q > 0$ (c'est une quantité), le coût moyen est égal au coût marginal pour $Q = 6$, c'est-à-dire la quantité qui minimise le coût moyen.

Exercice 3 - Placements

Une personne place, pendant un an, une partie de son capital à 6% et l'autre à 4%; elle reçoit 492 euros d'intérêts. Si elle avait échangé les taux des deux placements, les intérêts auraient été inférieurs de 25 euros. On cherche à calculer la somme totale initialement investie.

1) Expliquer pourquoi ce problème se ramène à la résolution du système

$$\begin{cases} 6x + 4y & = 49200 \\ 4x + 6y & = 46700 \end{cases}$$

Soit x le montant du capital placé à 6% et y le montant du capital placé à 4%. D'après les données de l'énoncé $0.04x + 0.06y = 492$ et en échangeant x et $y, 0.04y + 0.06x = 492 - 25 = 467$. Le problème se ramène donc bien au système proposé, en multipliant les deux équations par 100.

2) Quel est le déterminant du système ? En déduire le nombre de solutions du système.

Ce déterminant vaut $6 \times 6 - 4 \times 4 = 36 - 16 = 20 \neq 0$, il y a donc une unique solution au système.

3) Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Interpréter le système précédent matriciellement.

Matriciellement, le système s'écrit $AX = C$, avec $C = \begin{pmatrix} 49200 \\ 46700 \end{pmatrix}$.

4) Vérifier que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

est la matrice inverse de A. En déduire la solution du système.

La multiplication de A par B donne bien la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $X = A^{-1}C = BC = \begin{pmatrix} 5420 \\ 4170 \end{pmatrix}$

Exercice 4 - Fonctions de coût

Dans une usine, le coût total de production est estimé par la fonction

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 48q,$$

et on suppose que q varie dans l'intervalle $]0; 8[$.

1) Calculer l'expression de $Cm(q)$ et $CM(q)$.

   $Cm(q) = 3q^2 - 24q + 48$, et $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q} = q^2 - 12q + 48$.

2) Trouver la quantité q_0 pour laquelle le coût moyen est minimum.

   $CM'(q) = 2q - 12$, donc $CM'(q_0) = 0 \Leftrightarrow 2q_0 - 12 = 0 \Leftrightarrow q_0 = 6$. Cette valeur correspond bien à un minimum car $2q-12 < 0$ si $q < 6$ et $2q-12 > 0$ si $q > 6$, ou plus simplement en constatant que $CM''(q) = 2$ donc en particulier $CM''(6) = 2 > 0$, ce qui permet de conclure directement qu'il s'agit d'un minimum.

3) Trouver la quantité q_1 pour laquelle le coût moyen est égal au coût marginal. Que constatez-vous ?

$$\begin{aligned} Cm(q) &= CM(q) \\ \Leftrightarrow 3q^2 - 24q + 48 &= q^2 - 12q + 48 \\ \Leftrightarrow 2q^2 - 12q &= 0 \ldots \end{aligned}$$

   Pour la suite, cf exercice 2 question 4).

4) Calculer $Cm(4)$. Déterminer alors les constantes a et b telles que $Cm(q) = (q-4)(aq+b)$

   $Cm(4) = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 48 = 48 - 96 + 48 = 0$, donc $Cm(q)$ est factorisable par $q - 4$. On procède par identification :

   $(q-4)(aq+b) = aq^2 - 4aq + bq - 4b = aq^2 + (b-4a)q - 4b$. On identifie ainsi $a = 3$ et $-4b = 48$, soit $b = -12$.

   Donc $Cm(q) = (q-4)(3q-12) = (q-4) \times 3(q-4) = 3(q-4)^2$.

5) Étudier le signe de $Cm(q)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction C.

   $Cm(q) \geq 0$ car $3 > 0$ et $(q-4)^2 \geq 0$, donc la fonction C est croissante sur $]0; 8[$.

Exercice 5 - Étude de fonction

Soit la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$.

1) Calculer $f(-3)$. On admet alors que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = (x+3)(\alpha x + \beta)$, où α et β sont des constantes. En développant cette expression, et en identifiant les différents coefficients, déterminer les valeurs de α et β.

   $f(-3) = 2 \times (-3)^2 - 4 \times (-3) - 30 = 18 + 12 - 30 = 0$, donc $f(x)$ est factorisable par $x + 3$. On procède par identification :

   $(x+3)(\alpha x + \beta) = \alpha x^2 + (\alpha + 3\beta)x + 3\beta$, d'où $\alpha = 2$ et $3\beta = -30$, soit $\beta = -10$.

2) Étudier le signe de $f(x)$.

   $2x - 10 = 0$ si et seulement si $x = 5$.

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = (x+3)(2x-10)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit maintenant la fonction g définie pour tout x réel par $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 15x^2 + 12$.

1) Calculer la dérivée $g'(x)$. Déduire de l'étude de $f(x)$ le signe de $g'(x)$.

2) En déduire le tableau de variation de g.

   $g'(x) = \frac{1}{2} \times 4x^3 - \frac{4}{3} \times 3x^2 - 15 \times 2x = 2x^3 - 4x^2 - 30x = xf(x)$.

x	$-\infty$		-3		0		5		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x) = xf(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-46.5	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\frac{1303}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 6 -

On considère la fonction de demande suivante

$$Q(p) = \frac{ap+b}{p+c},$$

où p désigne le prix de vente unitaire.

Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

1) On précise que la demande vaut 25 (respectivement 14 et 3) pour un prix unitaire de 1 (respectivement de 2 et de 5). En déduire un système de trois équations vérifiées par les constantes a, b et c.

2) Préciser les étapes intermédiaires prouvant que ce système est équivalent au système (S)

$$\begin{cases} Q(1) & = 25 \\ Q(2) & = 14 \\ Q(5) & = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{1+c} & = 25 \\ \frac{2a+b}{2+c} & = 14 \\ \frac{5a+b}{5+c} & = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b & = 25(c+1) \\ 2a+b & = 14(c+2) \\ 5a+b & = 3(c+5), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-25c & = 25\,(L_1) \\ 2a+b-14c & = 28\,(L_2) \\ 5a+b-3c & = 15\,(L_3). \end{cases}$$

En effectuant les combinaisons $(L_2) \leftarrow (L_2)-2(L_1)$ et $(L_3) \leftarrow (L_3)-5(L_1)$, on retrouve le système (S)

$$\begin{cases} a+b & -25c = 25 \\ \quad -b & +36c = -22 \\ \quad -4b & +122c = -110. \end{cases}$$

On considère maintenant le sous-système (S') formée par les deux dernières équations de (S).

3) Que vaut le déterminant de ce système (S')? Quel est alors le nombre de solutions du système ?

Ce déterminant vaut $(-1) \times 122 - (-4) \times 36 = -122 + 144 = 22 \neq 0$, donc il y a une unique solution au système.

4) Résoudre le système (S') par la méthode de votre choix. En déduire la valeur de a.

Par exemple en combinant (L_3) avec $4(L_2)$, il vient $c = 1$, d'où $b = 58$, puis en utilisant $(L_1), a = -8$.

5) Quelle est la demande pour un prix de 7 ?

On a finalement
$$Q(p) = \frac{-8p+58}{p+1},$$
d'où
$$Q(7) = \frac{-8 \times 7 + 58}{7+1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$