Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

Corrigé des séances de TD 1 à 3

Examen de mai 2007 - Problème 1

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}.$$

D'après les données de l'énoncé, on doit résoudre le système d'équations $f(1) = 15, f(2) = 8$ et $f(5) = 1$.

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c+1} & = 15 \\ \frac{2a+b}{2c+1} & = 8 \\ \frac{5a+b}{5c+1} & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b & = 15(c+1) \\ 2a+b & = 8(2c+1) \\ 5a+b & = 5c+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-15c & = 15\,(L_1) \\ 2a+b-16c & = 8\,(L_2) \\ 5a+b-5c & = 1\,(L_3) \end{cases}$$

On résout alors le système par combinaison (méthode dite du pivot de Gauss).

$$\begin{cases} a+b-15c & = 15\,(L_1) \\ a-c & = -7\,(L_2) \leftarrow (L_2)-(L_1) \\ 4a+10c & = -14\,(L_3) \leftarrow (L_3)-(L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-15c & = 15\,(L_1) \\ a-c & = -7\,(L_2) \\ 14c & = 14\,(L_3) \leftarrow (L_3)-4(L_2) \end{cases}$$

En résolvant les trois équations (du bas vers le haut), on trouve comme solution $\{a = -6, b = 36, c = 1\}$. Ainsi,

$$y = f(x) = \frac{-6x+36}{x+1}.$$

2) On part de l'expression proposée

$$\begin{aligned} -6 + \frac{42}{x+1} &= \frac{-6(x+1)}{x+1} + \frac{42}{x+1} \\ &= \frac{-6x-6)}{x+1} + \frac{42}{x+1} \\ &= \frac{-6x-6+42}{x+1} \\ &= \frac{-6x+36}{x+1} = f(x). \end{aligned}$$

3) La dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{(x+1)^2}$ donc
$f'(x) = -\frac{42}{(x+1)^2}$.

4) Comme $-42 < 0$ et $(x+1)^2 > 0$ (on étudie la fonction sur $\mathbb{R}_+$ donc $x \geq 0$) on en conclut que pour tout $x \geq 0, f'(x) < 0$ et donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

6) Deux contraintes doivent être respectées : x (le prix) doit être positif ou nul, et y (la demande) également. Il faut donc résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$. Comme on sait déjà que f est décroissante, il suffit en fait de résoudre $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -6 + \frac{42}{x+1} &= 0 \\ \frac{42}{x+1} &= 6 \\ x+1 &= \frac{42}{6} = 7 \\ x &= 6. \end{aligned}$$

x peut donc varier entre 0 et 6.

8) Graphiquement, on trouve que $f(x) = g(x)$ pour $x = 2$.

9)

$$\begin{aligned} I = \int_0^2 f(x) - g(x)dx &= \int_0^2 (-6 + \frac{42}{x+1} - \frac{1}{2}x^2 - 3x)dx \\ &= [-6x + 42\ln(x+1) - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_0^2 \\ &= -12 + 42\ln(3) - \frac{8}{6} - 6 \\ &= -\frac{58}{3} + 42\ln(3). \end{aligned}$$

TD n° 1

Exercice 1

Étude au point $x = 2$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= 0 \\ f(2) &= 0 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} a - \frac{b}{x} = a - \frac{b}{2}. \end{cases}$$

Pour que f soit continue en $x = 2$, il faut donc que $a - \frac{b}{2} = 0$.

Étude au point $x = 4$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x) &= \lim_{x\to 4^-} a - \frac{b}{x} = a - \frac{b}{4}. \\ f(4) &= a - \frac{b}{4} \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) &= 1. \end{cases}$$

Pour que f soit continue en $x = 4$, il faut donc que $a - \frac{b}{4} = 1$.

La résolution simultanée des deux équations (soit par substitution, soit par combinaison) conduit alors à une unique solution $\{a = 2, b = 4\}$.

Exercice 2

1) Les fonctions QD et QO sont définies respectivement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_+$.

2)

$$\begin{cases} QD(1) &= 37 \\ QO(1) &= \frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} QD(10) &= 1 \\ QO(10) &= \frac{5}{3} \end{cases}$$

La fonction $QD - Q0$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (différence de fonctions continues), et de plus $QD(1) - QO(1) > 0$, alors que $QD(10) - QO(10) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une valeur P_e telle que $QD - Q0)$ soit nulle en P_e, autrement dit $QD(P_e) - QO(P_e) = 0$.

3) La méthode de dichotomie consiste à couper l'intervalle en deux :
$QD(5.5) - Q0(5.5) > 0$, donc $P_e \in [5.5; 10]$
$QD(7.8) - Q0(7.8) > 0$, donc $P_e \in [7.8; 10]$
$QD(8.9) - Q0(8.9) > 0$, donc $P_e \in [8.9; 10]$, comme en fait la différence vaut environ 0.1, on va

tester les valeurs supérieures à 8.9 de 0.1 en 0.1 (avec un *pas* de 0.1),
$QD(9) - Q0(9) < 0$ donc $P_e \in [8.9; 9]$, on a ainsi déterminé P_e à 0.1 près.

Résolution exacte

$$-3 + \frac{40}{P} = \frac{P}{6} \Leftrightarrow -18 + \frac{240}{P} = P \Leftrightarrow P^2 + 18P - 240 = 0.$$

On résout l'équation du second degré:

$$\Delta = 18^2 - 4 \times 1 \times (-240) = 1284 > 0,$$

donc il y a deux solutions

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{-18 + \sqrt{1284}}{2} \approx 8.92 \\ P_2 &= \frac{-18 - \sqrt{1284}}{2} \approx -26.92, \end{aligned}$$

nous ne gardons que la solution positive P_1.

Exercice 3 : cf corrigé Maple

TD n° 2

Exercice 1

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$

1) f est définie sur $Df = \mathbb{R}$.
2)

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (x-1)(x-3) &= x^2 - x - 3x + 3 \\ &= x^2 - 4x + 3 = f'(x). \end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x) = (x-1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2007-2008
Faculté de Droit, Université Lille 2

Exercice 2

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x - 1}$$

1)$x - 1 = 0$ si et seulement si $x = 1$ donc f est définie sur $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2)

$$f(0) = -2, f(-2) = \frac{2}{3}, f(-4) = -\frac{2}{5},$$

et f n'est pas définie en 1.

3) f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = x^2 + 4x + 2$ et $v(x) = x - 1$.

De plus,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+4)(x-1) - (x^2+4x+2)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x - 2x - 4 - x^2 - 4x - 2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 6}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Comme $(x-1)^2 > 0$ (car $x \neq 1$), $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 6$. On doit donc étudier le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$, avec $a = 1, b = -2, c = -6$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 4 + 24 = 28 > 0$, donc le trinôme a deux racines réelles données par

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2 - \sqrt{28}}{2} \approx -1.64 \\ x_2 &= \frac{2 + \sqrt{28}}{2} \approx 3.64. \end{aligned}$$

On sait alors que $ax^2 + bx + c$ est du signe de a (ici $a = 1$) à l'extérieur des racines, ce qui nous donne le tableau de signes suivant (attention à la valeur 1)

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	≈ 0.71	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	≈ 11.3	$\nearrow$	$+\infty$