Université Lille 2 – Droit et Santé
Faculté des Sciences Juridiques, Politiques et Sociales
Licence AES, première année

Epreuve de Méthodes quantitatives en économie.

Mardi 22 Mai 2007, de 13h30 à 16h30
(calculatrice autorisée, documents non autorisés)

Questions de cours.(*5 points*) Soit f et g deux fonctions en deux variables réelles x et y à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, && (1)\\ (x,y) &\mapsto f(x,y). && (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, && (3)\\ (x,y) &\longmapsto g(x,y). && (4) \end{aligned}$$

On suppose que les dérivées partielles de jusqu'au seconde ordre de f et de g existent et sont continues dans un domaine $\mathcal{D}$.

1. Soit z une troisième variable rélle. Construire le *Lagrangien* F associé au problème de recherche d'extremum $\max f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$ avec le *multiplicateur de Lagrange* z. Sous la contrainte $g(x,y) = 0$, quand est-ce-que $f(x,y)$, admet un extremum la en un point (x_0, y_0) ?

2. Donner le *Hessien* $\nabla F(x,y,z)$ de F. Rappelons que F est une fonction en trois variables réelles x, y et z à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}, && (5)\\ (x,y,z) &\longmapsto F(x,y,z). && (6) \end{aligned}$$

   Soient x_1, y_1, z_1 tels que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1,z_1) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1,z_1) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_1,y_1,z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

   Suivant que $\nabla F(x_1,y_1,z_1) < 0$ ou $\nabla F(x_1,y_1,z_1) = 0$ ou $\nabla F(x_1,y_1,z_1) > 0$, donner la nature de l'extremum $f(x_1,y_1)$.

Problème 1 *(10 points)* On considère un produit P, et l'on suppose que la quantité demandée y soit une fonction du prix de la forme

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}.$$

1. Déterminer les réels a, b, c, pour que les quantités demandées pour les prix 1, 2 et 5 unités de prix soient respectivement 15, 8 et 1.

2. Vérifier qu'alors
$$f(x) = -6 + \frac{42}{x+1}.$$
3. Dériver la fonction f.
4. Etudier la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
5. Tracer le graphique de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
6. Dans quel intervalle peut varier x ?
7. Tracer le graphique de la fonction d'offre g est définie par
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto y = g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x. \end{aligned}$$
8. Déterminer graphiquement le prix x et la quantité y lorsque $f(x) = g(x)$ (ce point correspond à l'équilibre de l'offre et de la demande).
9. Calculer l'intégrale
$$I = \int_0^2 [f(x) - g(x)]dx.$$
10. Donner une interprétation graphique de I.

Problème 2 *(5 points)* Considérons une courbe d'*indifférence de consommation* de deux produits de consommation X et Y d'un pays producteur
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, && (8) \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = xy. && (9) \end{aligned}$$
où x et y sont respectivement les quantités de production des produits X et Y de ce pays producteur dont la courbe des possibilités de production, sur le marché national, est donnée par
$$x^2 + 80y \leq 1600. \tag{10}$$
Pour déterminer une politique de production en absence de commerce international, on vous demande maximixez $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$, où g est une fonction en deux variables réelles positives x et y à valeurs réelles positives :
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+, && (11) \\ (x, y) &\longmapsto g(x, y) = x^2 + 80y - 1600. && (12) \end{aligned}$$
1. Donnez le Lagrangien F relatif à f, g.
2. Donner le Hessien ∇F de F.
3. Soient x_0, y_0, z_0 tels que
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$
Montrez alors que z_0 vérifie une équation au second degré
$$z_0^2 = \frac{1}{12}. \tag{14}$$
4. En choisissant une solution positive de l'équation (14), montrez que
$$x_0 = \frac{40}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{40}{3}. \tag{15}$$
5. Calculer $f(x_0, y_0)$. Déterminer la nature de ce point.