Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2006-2007
Faculté de Droit, Université Lille 2

TD Méthodes Quantitatives
Contrôle n°1

Exercice 1 -

Lors d'une certaine journée d'hiver, on admet que la température extérieure est donnée en fonction de l'heure, par la fonction

$$T(h) = \frac{h+a}{b-h} \qquad h \in [0, 24].$$

1) On précise que la température à $h = 0$ était de 2 degrés, et que la température à $h = 12$ était de 3 degrés. En déduire un système de deux équations vérifiées par les constantes a et b.

   Les données ci-dessus se traduisent par $T(0) = 2$ et $T(12) = 3$, soit

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} & = 2 \\ \dfrac{12+a}{b-12} & = 3. \end{cases}$$

2) Vérifier que ce système peut s'écrire

$$\begin{cases} a - 2b & = 0 \\ a - 3b & = -48 \end{cases}$$

   En effet,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= 2 \Leftrightarrow a = 2b \Leftrightarrow a - 2b = 0 \\ \frac{12+a}{b-12} &= 3 \Leftrightarrow 12 + a = 3(b-12) \Leftrightarrow a - 3b = -36 - 12 \Leftrightarrow a - 3b = -48. \end{aligned}$$

3) Que vaut le déterminant de ce système ? Quel est alors le nombre de solutions du système ?

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times (-3) - 1 \times (-2) = -1 \neq 0,$$

   donc il y a une seule solution au système.

4) Résoudre le système en faisant apparaître clairement les calculs intermédiaires.

   $(1) - (2) \Leftrightarrow b = 48$. De (1), on déduit alors $a = 2 \times 48 = 96$.

5) Quelle était la température à 19h12 ? À quelle heure la température était-elle de 3.5 degrés ?

   D'après la question 4), on a $T(h) = \frac{h+96}{48-h}$. De plus, $19h12min = 19 + \frac{12}{60}h = 19.2h$. A 19h12, la température valait exactement $T(19.2) = 4$.

   La température était de 3.5 à une heure h_0 telle que $T(h_0) = 3.5$, il faut donc résoudre l'équation

$$\frac{96+h_0}{48-h_0} = 3.5 \Leftrightarrow 96 + h_0 = 3.5(48 - h_0) \Leftrightarrow 4.5h_0 = 75 \Leftrightarrow h_0 = 16.$$

   La température était de 3.5 degrés à $16h00$.

Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2006-2007
Faculté de Droit, Université Lille 2

Exercice 2 -

Soit la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$.

1) Calculer $f(-3)$. On admet alors que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = (x+3)(cx+d)$, où c et d sont des constantes. En développant cette expression, et en identifiant les différents coefficients, déterminer les valeurs de c et d.

   $f(-3) = 2 \times 9 - 4 \times (-3) - 30 = 0$.

   $f(x) = (x+3)(cx+d) = cx^2 + (3c+d)x + 3d$. On identifie ainsi : $c = 2$ et $3d = -30$, soit $d = -10$, donc $f(x) = (x+3)(2x-10)$.

2) Étudier le signe de $f(x)$.

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x-10$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit maintenant la fonction g définie pour tout x réel par $g(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 - 15x^2 + 12$.

1) Calculer la dérivée $g'(x)$. Déduire de l'étude de $f(x)$ le signe de $g'(x)$.

   $g'(x) = 2x^3 - 4x^2 - 30x + 12 = x(2x^2 - 4x - 30) = xf(x)$, donc

x	$-\infty$		-3		0		5		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2) En déduire le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		-3		0		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(-3)$	↗	12	↘	$g(5)$	↗	$+\infty$