Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2006-2007
Faculté de Droit, Université Lille 2

Corrigé des TD 4 et 5

TD n°4

Exercice 1

1) $f \circ g(x) = (3x+1)^3$ et $(f \circ g)'(x) = 9(3x+1)^2$.
2) $f \circ g(x) = \dfrac{1}{2(x^2+5)+4} = \dfrac{1}{2x^2+14}$, et $(f \circ g)'(x) = -\dfrac{4x}{(2x^2+14)^2}$.
3) $f \circ g(x) = \ln(-3x+2)$ et $(f \circ g)'(x) = \dfrac{-3}{-3x+2}$.

Exercice 2

1) f est un polynôme donc $Df = \mathbb{R}$.
2) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$.
3) $f'(1) = 6 - 18 + 12 = 0$ donc $f'(x)$ est factorisable par $(x-1)$. On trouve alors, par la méthode de votre choix (division ou identification) que $f'(x) = (x-1)(6x-12)$.

Conseil: Si vous préférez repartir de l'expression de $f'(x)$ obtenue en 2) et calculer le discriminant pour ensuite chercher les solutions de $f'(x) = 0$, vérifiez que vous retrouver bien parmi vos deux solutions la valeur $x = 1$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x) = (x-1)(6x-12)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

On considère maintenant $g(x) = 2\ln^3(x) - 9\ln^2(x) + 12\ln(x) - 6$, définie sur l'ensemble $Dg =]0;+\infty[$ (car la fonction ln n'est définie que sur $]0;+\infty[$). f et g sont donc reliées par la relation $g(x) = f(ln(x))$ et donc (dérivation des fonctions composées), $g'(x) = f'(ln(x)) \times \dfrac{1}{x}$. Par conséquent, $g'(x) = \dfrac{1}{x}(\ln(x)-1)(6\ln(x)-12)$. Il reste alors à résoudre $\ln(x) - 1 = 0$ (qui a pour solution $x = e$) et $6\ln(x) - 12 = 0$ (qui se résout en $\ln(x) = 2$ soit $x = e^2$.) La fonction ln étant croissante sur $]0;+\infty[$, on en déduit les tableaux suivants (le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur, car on ne considère que des $x > 0$)

x	0		e		e^2		$+\infty$
$\ln(x)-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$6\ln(x)-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	0		e		e^2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2006-2007
Faculté de Droit, Université Lille 2

Exercice 3

1)$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ donc le seul point critique (point dont les coordonnées annulent les *deux* dérivées d'ordre 1) est le point $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Le déterminant formé par les dérivées partielles d'ordre 2 (déterminant appelé *Hessien*) vaut donc

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 0 \times 0 = 4 > 0,$$

par conséquent f admet soit un maximum soit un minimum en $(0,0)$. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$,il s'agit en fait d'un minimum.

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ donc le seul point critique est le point $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Le Hessien en $(0,0)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 < 0,$$

par conséquent f n'admet ni maximum ni minimum en $(0,0)$.

3) $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2 + 4y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 2 + 4x$. La recherche d'un point critique amène donc à résoudre le système d'équations : $\begin{cases} -2x + 4y & = -2 \\ 4x - 2y & = -2, \end{cases}$ système dont on vérifie qu'il admet une unique solution $(-1,-1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$$

Le Hessien en $(-1,-1)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \times -2 - 4 \times 4 = -12 < 0,$$

par conséquent f n'admet ni maximum ni minimum en $(-1,-1)$.

TD n°5

Exercice 1

1)$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 6x$.

2) Vérifions que $(0,0)$ est un point critique pour f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3 \times 0^2 + 6 \times 0 & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -3 \times 0^2 + 6 \times 0 & = 0. \end{cases}$$

Vérifions que $(2,-2)$ est un point critique pour f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(2,-2) = 3 \times 2^2 + 6 \times -2 & = 12 - 12 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,-2) = -3 \times (-2)^2 + 6 \times 2 & = -12 + 12 = 0. \end{cases}$$

3)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y.$$

Le Hessien en $(0,0)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} 6 \times 0 & 6 \\ 6 & -6 \times 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 - 6 \times 6 = -36 < 0,$$

par conséquent f n'admet ni maximum ni minimum en $(0,0)$.

Et le Hessien en $(2,-2)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} 6 \times 2 & 6 \\ 6 & -6 \times -2 \end{vmatrix} = 12 \times 12 - 6 \times 6 = 108 > 0,$$

par conséquent f admet un maximum ou un minimum en $(2,-2)$. Comme de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-2) = 12 > 0$, il s'agit d'un minimum.

Exercice 2

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xe^{-y^2}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 \times -2ye^{-y^2} + 3y^2 - 6y$.

Pour chercher le (ou les) point(s) critique(s), il faut d'abord résoudre l'équation $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$. Or, comme $e^{-y^2} \neq 0$, la seule solution est $x = 0$.

L'équation $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ se résume alors à $3y^2 - 6y = 0$ qui a pour solutions $y = 0$ et $y = 2$.

Il y a donc deux points critiques pour g qui sont $(0,0)$ et $(0,2)$.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2e^{-y^2} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2x \times -2ye^{-y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2x \times -2ye^{-y^2} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -2x^2\left(e^{-y^2} + y \times -2ye^{-y^2}\right) + 6y - 6,$$

cette dernière dérivée se calculant en remarquant que ye^{-y^2} s'écrit comme un produit $u(y)v(y)$, avec $u(y) = y$ et $v(y) = e^{-y^2}$.

Le Hessien en $(0,0)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 2 \times -6 - 0 \times 0 = -12 < 0,$$

par conséquent g n'admet ni maximum ni minimum en $(0,0)$.

Et le Hessien en $(0,2)$ vaut

$$\begin{vmatrix} 2e^{-4} & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 2e^{-4} \times 6 - 0 \times 0 = 12e^{-4} > 0,$$

par conséquent g admet un maximum ou un minimum en $(0,2)$. Comme de plus $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,2) = 2e^{-4} > 0$, il s'agit d'un minimum.

Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2006-2007
Faculté de Droit, Université Lille 2

Exercice 3

1) Sous la contrainte $2x+3y=15$, on peut exprimer y en fonction de x : $y=-\dfrac{2}{3}x+5$.

On est donc ramené à l'étude d'une fonction à une seule variable :

$$g_1(x)=f_1(x,-\frac{2}{3}x+5)=x^2\left(-\frac{2}{3}x+5\right)+x^2=-\frac{2}{3}x^3+6x^2.$$

$g_1'(x)=-2x^2+12x=2x(-x+6)$ donc g_1' s'annule en $x=0$ et $x=6$. Pour déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, on peut procéder à l'étude du signe de g_1' via un tableau de signes. On peut aussi regarder la dérivée seconde $g_1''(x)=-4x+12$.

Plus précisément, $g_1''(0)=12>0$ donc g_1 admet un minimum en $x=0$ et $g_1''(6)=-4\times6+12=-12<0$ donc g_1 admet un maximum en $x=6$.

2) Sous la contrainte proposée, on exprime y en fonction de x : $y=-\dfrac{3}{4}x+5$.

Soit $g_2(x)=f_2(x,-\frac{3}{4}x+5)=-\frac{3}{4}x^2+3x$.

$g_2'(x)=-\dfrac{3}{2}x+3$ donc g_2' s'annule en $x=2$. Pour constater qu'il s'agit d'un maximum, on peut, par exemple, calculer $g_2''(x)=-\frac{3}{2}$. En particulier $g_2''(2)=-\frac{3}{2}<0$, ce qui prouve qu'il s'agit d'un maximum.