

CONTRÔLE DU 09 MAI 2007

Exercice 1

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x + 3y^2 - 4y + 1$.

Vérifions que $(1, 0)$ est un point critique pour f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 2 \times 1 \times 0 - 2 \times 0 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 \times 0^2 - 4 \times 0 + 1 = 0. \end{cases}$$

Vérifions que $(1, \frac{4}{3})$ est un point critique pour f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1, \frac{4}{3}) = 2 \times 1 \times \frac{4}{3} - 2 \times \frac{4}{3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, \frac{4}{3}) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 \times (\frac{4}{3})^2 - 4 \times \frac{4}{3} + 1 = -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} = 0. \end{cases}$$

2) Pour déterminer la nature du point critique, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x - 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x - 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 4.$$

Le Hessien en $(1, \frac{4}{3})$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{8}{3} \times 4 - 0 \times 0 = \frac{32}{3} > 0,$$

comme de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, \frac{4}{3}) = \frac{8}{3} > 0$, f admet un minimum en $(1, \frac{4}{3})$.

3) En ce point, la fonction vaut $f(1, \frac{4}{3}) = -\frac{32}{27} \approx -1.19$

Optimisation sous contrainte

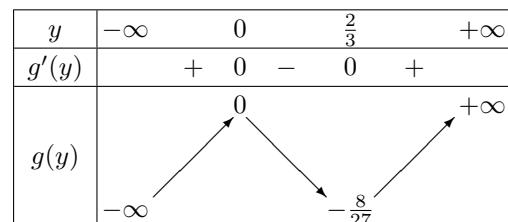
1) $3x + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x = -3y + 3 \Leftrightarrow x = -y + 1$.

2) Sous cette contrainte, la fonction devient :

$$\begin{aligned} g(y) = f(-y + 1, y) &= (-y + 1)^2 y - 2(-y + 1)y + y^3 - 2y^2 + y \\ &= (y^2 - 2y + 1)y + (2y - 2)y + y^3 - 2y^2 + y = 2y^3 - 2y^2. \end{aligned}$$

3) $g'(y) = 6y^2 - 4y = y(6y - 4)$.

y	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
y	-	0	+	+
$6y - 4$	-	-	0	+
$g'(y)$	+	0	-	0



Lorsque $y = 0$, on a $x = 1$, et lorsque $y = \frac{2}{3}$, on a $x = \frac{1}{3}$, les extrema de la fonction f sous la contrainte apparaissent dans le tableau de variations (0 et $-\frac{8}{27}$).

Exercice 2

1) $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + 3y$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = 3x + 2y - 4$, donc pour trouver le point critique, il faut résoudre le système:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0, \end{cases}$$

système qu'on résout par combinaison ou bien par substitution, et qui a pour solution $x = 2.4$ et $y = -1.6$.

2)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 3 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 3 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2.$$

Le Hessien *en* $(2.4, -1.6)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 3 \times 3 = -5 < 0,$$

donc le point critique ne correspond ni à un maximum, ni à un minimum (point-col).