Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2006-2007
Faculté de Droit, Université Lille 2

Contrôle du 09 mai 2007

Exercice 1

1)$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x + 3y^2 - 4y + 1$.

Vérifions que $(1,0)$ est un point critique pour f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2\times 1\times 0 - 2\times 0 & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1^2 - 2\times 1 + 3\times 0^2 - 4\times 0 + 1 & = 0. \end{cases}$$

Vérifions que $(1,\frac{4}{3})$ est un point critique pour f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,\frac{4}{3}) = 2\times 1\times \frac{4}{3} - 2\times \frac{4}{3} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,\frac{4}{3}) = 1^2 - 2\times 1 + 3\times \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\times \frac{4}{3} + 1 & = -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} = 0. \end{cases}$$

2)Pour déterminer la nature du point critique, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x - 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x - 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 4.$$

Le Hessien *en* $(1,\frac{4}{3})$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{8}{3}\times 4 - 0\times 0 = \frac{32}{3} > 0,$$

comme de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,\frac{4}{3}) = \frac{8}{3} > 0$, f admet un minimum en $(1,\frac{4}{3})$.

3) En ce point, la fonction vaut $f(1,\frac{4}{3}) = -\frac{32}{27} \approx -1.19$

Optimisation sous contrainte

1) $3x + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x = -3y + 3 \Leftrightarrow x = -y + 1$.
2) Sous cette contrainte, la fonction devient :

$$\begin{aligned} g(y) = f(-y+1,y) &= (-y+1)^2 y - 2(-y+1)y + y^3 - 2y^2 + y \\ &= (y^2 - 2y + 1)y + (2y-2)y + y^3 - 2y^2 + y = 2y^3 - 2y^2. \end{aligned}$$

3) $g'(y) = 6y^2 - 4y = y(6y - 4)$.

y	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y		$-$	0	$+$		$+$	
$6y-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(y)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

y	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(y)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(y)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{8}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Lorsque $y = 0$, on a $x = 1$, et lorsque $y = \frac{2}{3}$, on a $x = \frac{1}{3}$, les extrema de la fonction f sous la contrainte apparaissent dans le tableau de variations (0 et $-\frac{8}{27}$).

Exercice 2

1)$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + 3y$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = 3x + 2y - 4$, donc pour trouver le point critique, il faut résoudre le système:

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 0 \\ 3x + 2y - 4 & = 0, \end{cases}$$

système qu'on résout par combinaison ou bien par substitution, et qui a pour solution $x = 2.4$ et $y = -1.6$.
2)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 3 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 3 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2.$$

Le Hessien *en* $(2.4, -1.6)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 3 \times 3 = -5 < 0,$$

donc le point critique ne correspond ni à un maximum, ni à un minimum (point-col).