Licence SPJE mention AES, 1ère année, 2006-2007
Faculté de Droit, Université Lille 2

Contrôle du 02 mai 2007

Exercice 1

1)$\frac{\partial f}{\partial x} = -x^2 + 4x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{3}y^2 + 2y$. Pour déterminer le point critique, on résout donc
$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$, et
$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow y(-\frac{1}{3}y + 2) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 6$.
Comme x et y ne prennent que des valeurs strictement positives, l'unique point critique est donc $(4, 6)$.
2)Pour déterminer la nature du point critique, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2x + 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2}{3}y + 2.$$

Le Hessien *en* $(4, 6)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-4) \times (-2) - 0 \times 0 = 8 > 0,$$

comme de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4, 6) = -4 < 0$, f admet un maximum en $(4, 6)$.
3) Ce profit maximum vaut $f(4, 6) = \frac{38}{3} \approx 12.7$

Optimisation sous contrainte

1) $-3x + 3y + 9 = 0 \Leftrightarrow 3y = 3x - 9 \Leftrightarrow y = x - 3$.
2) Sous cette contrainte, la fonction de profit devient :

$$\begin{aligned} g(x) = f(x, x-3) &= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{9}(x-3)^3 + (x-3)^2 - 10 \\ &= -\frac{4}{9}x^3 + 4x^2 - 9x + 2. \end{aligned}$$

3) $g'(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - 9$, on résout $g'(x) = 0$, équation qui a 2 solutions $x = 1.5$ et $x = 4.5$. La seule solution à retenir est $x = 4.5$ (ce qui donne $y = 4.5 - 3 = 1.5$). L'autre solution donnerait $y = -1.5$, ce qui est absurde (car $y > 0$).
4) $g''(x) = -\frac{8}{3}x + 8$, donc $g''(4.5) = -4 < 0$, donc la solution trouvée correspond à un profit maximal, qui vaut $f(4.5, 1.5) = 2$.

Exercice 2

1)$\frac{\partial g}{\partial x} = ye^x$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = e^x - 2$, donc $\frac{\partial g}{\partial x}(\ln 2, 0) = 0 \times e^{\ln 2} = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(\ln 2, 0) = e^{\ln 2} - 2 = 2 - 2 = 0$.
Donc $(\ln 2, 0)$ est bien un point critique pour g.
2)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = ye^x \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = e^x \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = e^x \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

Le Hessien *en* $(\ln 2, 0)$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 - 2 \times 2 = -4 < 0,$$

donc le point critique ne correspond ni à un maximum, ni à un minimum (point-col).